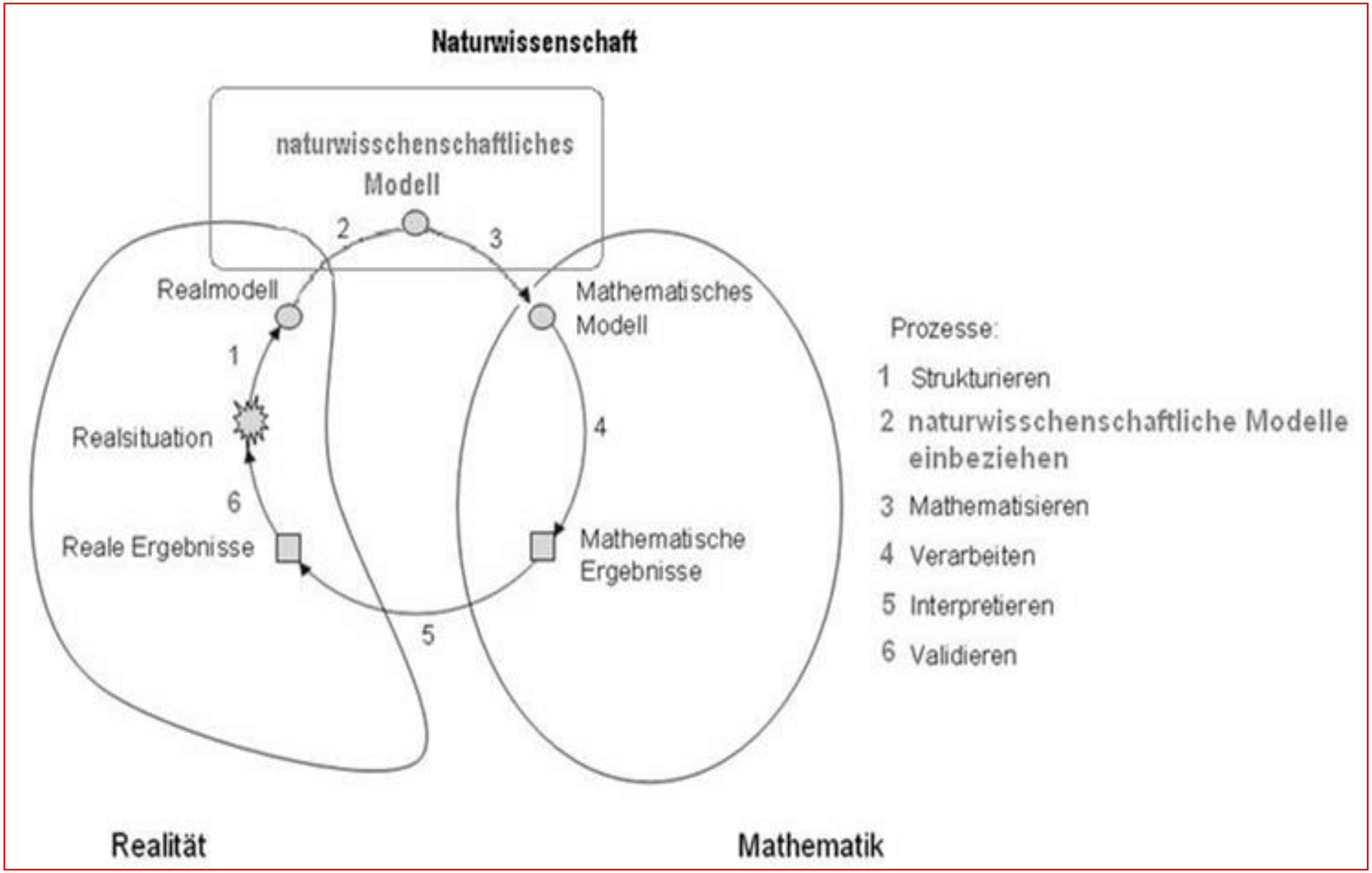
OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

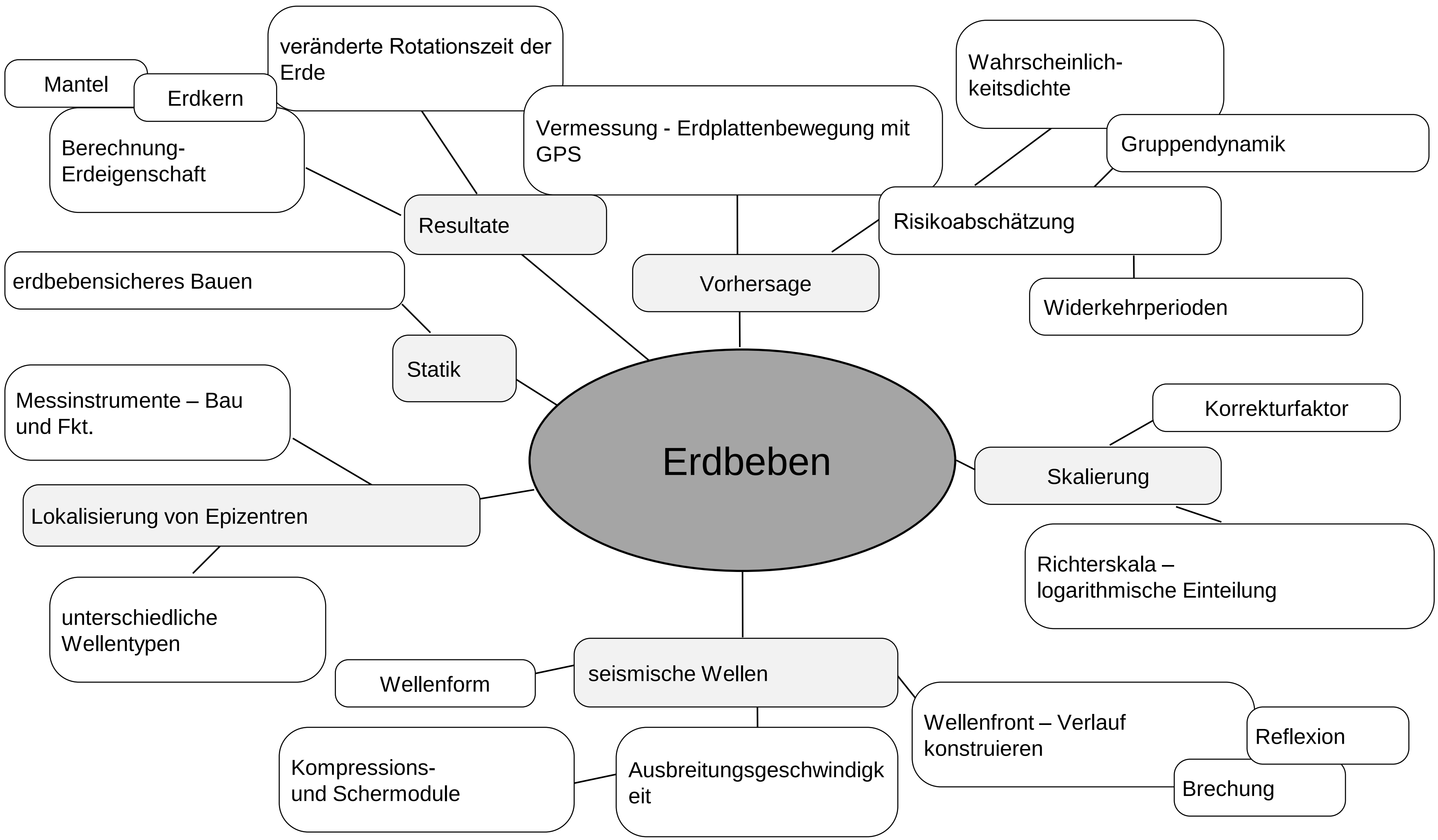
MATH FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

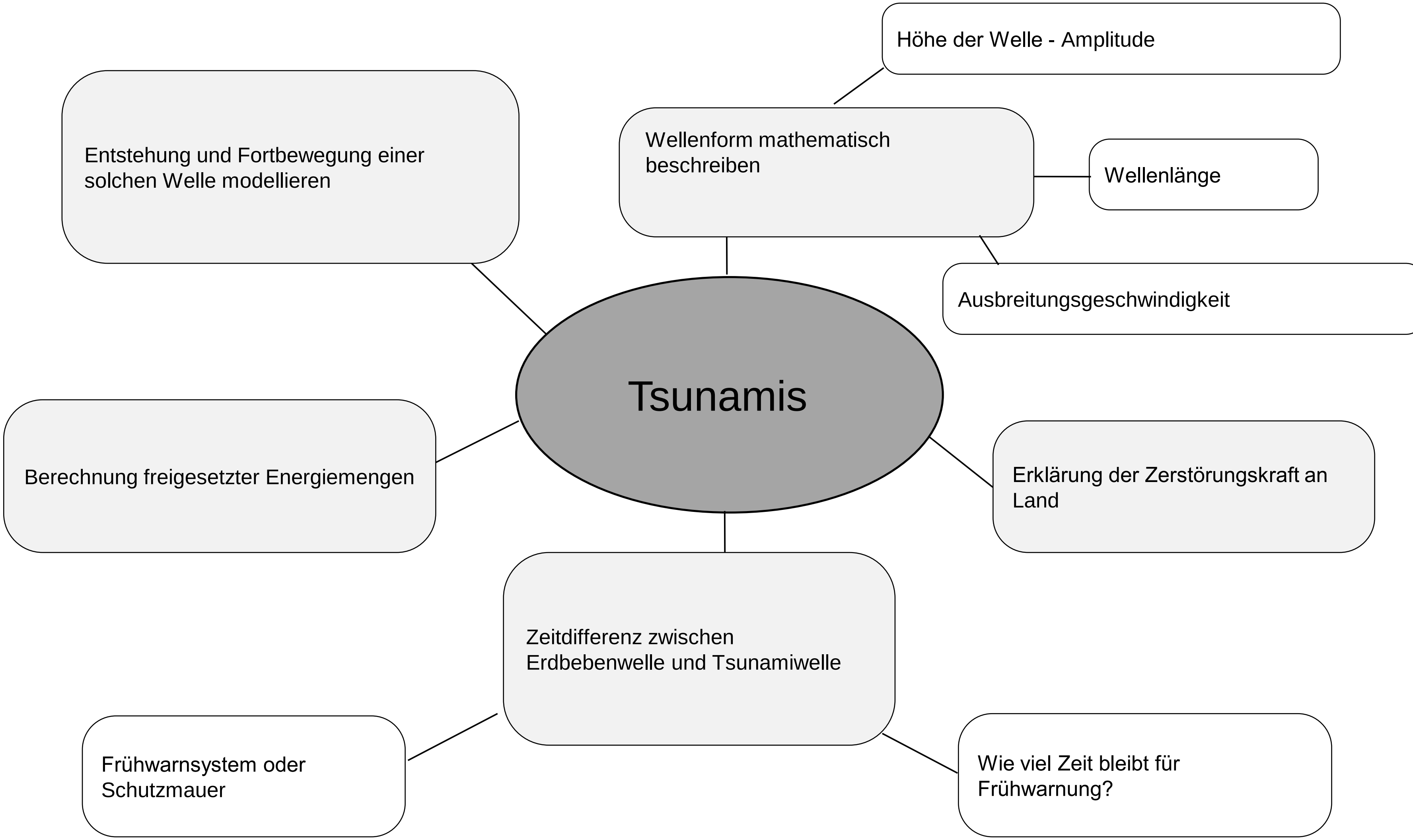
MATHEMATISCHE MODELLIERUNG VON TSUNAMIS UND TORNADOS

HERBERT HENNING, SABRINA SPIELER, MAIK OSTERLAND

Tsunamigefährdete Küstenregionen sind heute mit sogenannten Frühwarnsystemen ausgerüstet. Eine solche Frühwarnung der Bevölkerung beruht auf mathematisch gestützten Simulationen und gewissen Modellannahmen. Die Vorhersage ist überhaupt nur möglich, weil sich die seismischen Wellen eines tsunamiverursachenden Erdbebens schneller ausbreiten als die Flutwelle selbst. Im Folgenden soll mit Hilfe mathematischer Modellierung am Beispiel des indonesischen Frühwarnsystems abgeschätzt werden, wie viel Zeit den Menschen für eine Evakuierung zur Verfügung steht. Zusätzlich soll die Frage, bei welchen Erdbeben eine Evakuierung überhaupt noch möglich ist, beantwortet werden.


Naturwissenschaft
naturwisschenschaftliches Modell
2
3
Realmodell
Mathematisches Modell
1
Realsituation
4
6
Reale Ergebnisse
Mathematische Ergebnisse
5
Prozesse:
1 Strukturieren
2 naturwisschenschaftliche Modelle einbeziehen
3 Mathematisieren
4 Verarbeiten
5 Interpretieren
6 Validieren
Realität
Mathematik


Erdbeben
Resultate
veränderte Rotationszeit der Erde
Mantel
Erdkern
Berechnung- Erdeigenschaft
Vorhersage
Vermessung - Erdplattenbewegung mit GPS
Risikoabschätzung
Wahrscheinlich-keitsdichte
Gruppendynamik
Widerkehrperioden
Statik
erdbebensicheres Bauen
Skalierung
Korrekturfaktor
Richterskala – logarithmische Einteilung
Lokalisierung von Epizentren
Messinstrumente – Bau und Fkt.
unterschiedliche Wellentypen
seismische Wellen
Wellenform
Ausbreitungsgeschwindigkeit
Kompressions- und Schermodule
Wellenfront – Verlauf konstruieren
Reflexion
Brechung

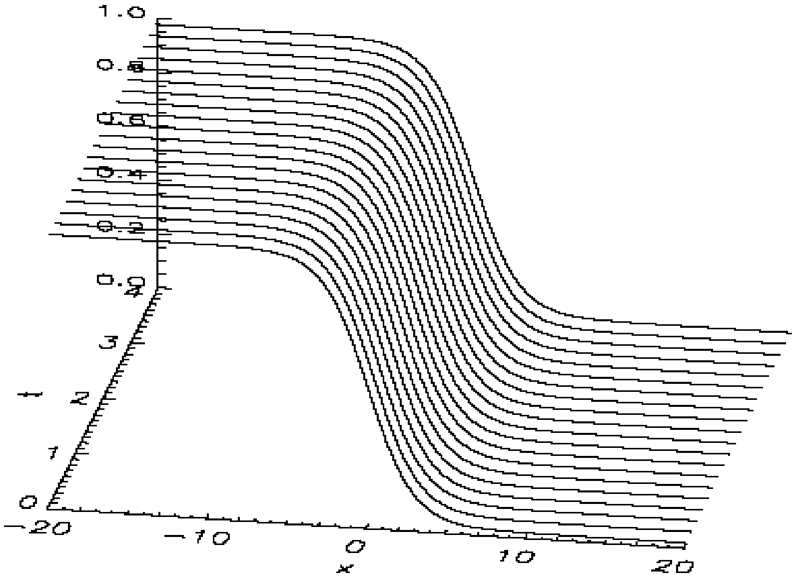

Tsunamis
Entstehung und Fortbewegung einer solchen Welle modellieren
Wellenform mathematisch beschreiben
Höhe der Welle - Amplitude
Wellenlänge
Ausbreitungsgeschwindigkeit
Berechnung freigesetzter Energiemengen
Erklärung der Zerstörungskraft an Land
Zeitdifferenz zwischen Erdbebenwelle und Tsunamiwelle
Frühwarnsystem oder Schutzmauer
Wie viel Zeit bleibt für Frühwarnung?

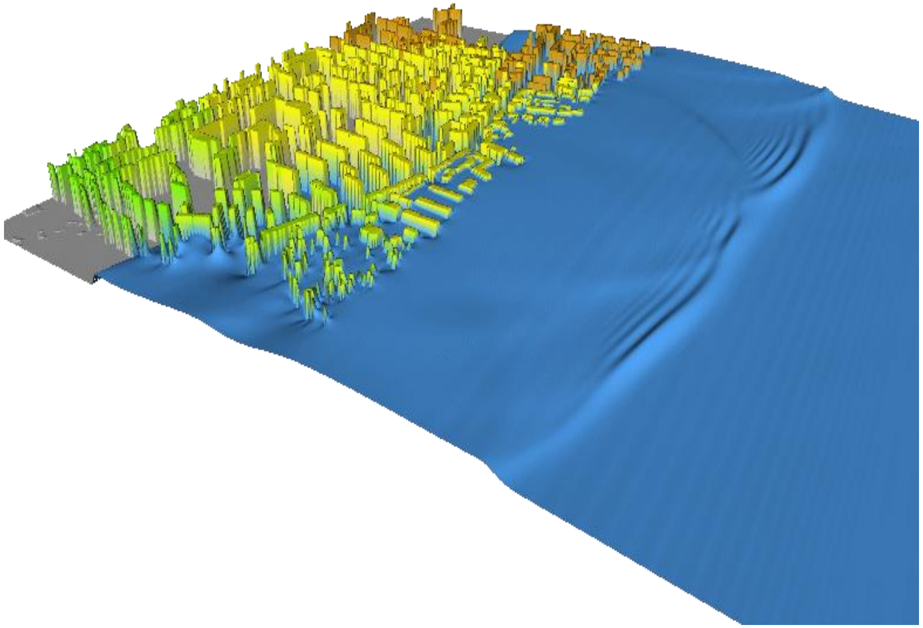
TSUNAMI – HÄUFIG FÜR MENSCH UND UMWELT EIN VERHEERENDES NATUREREIGNIS…

<u>Abbildungen:</u>

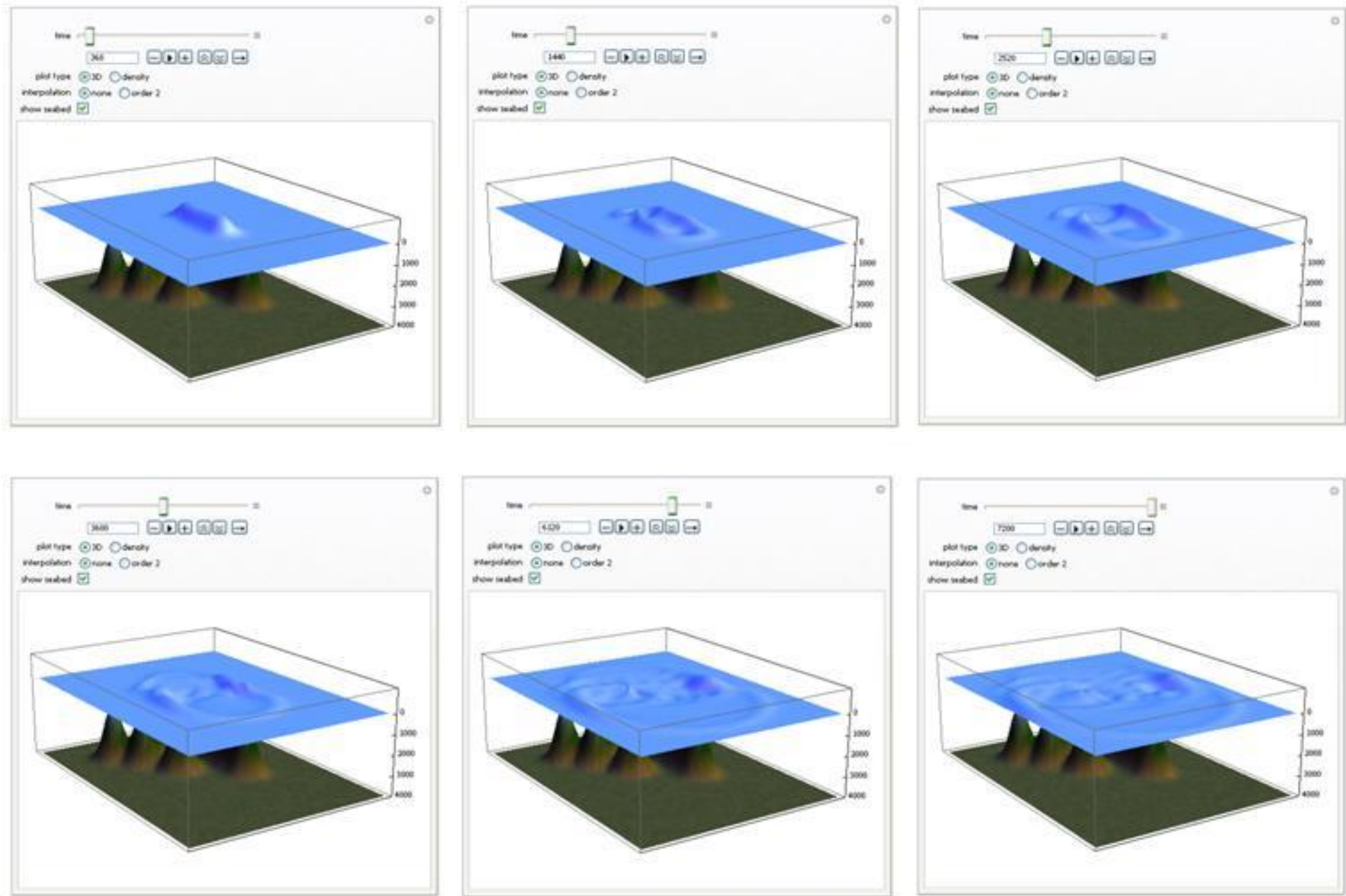
1. Auftreffen des Tsunami am 26.12.2004 auf die Küste Thailands
2. zerstörtes Haus bei Mount Lavinia (Sri Lanka)
3. Tsunami-Warnschild an gefährdeten Küsten

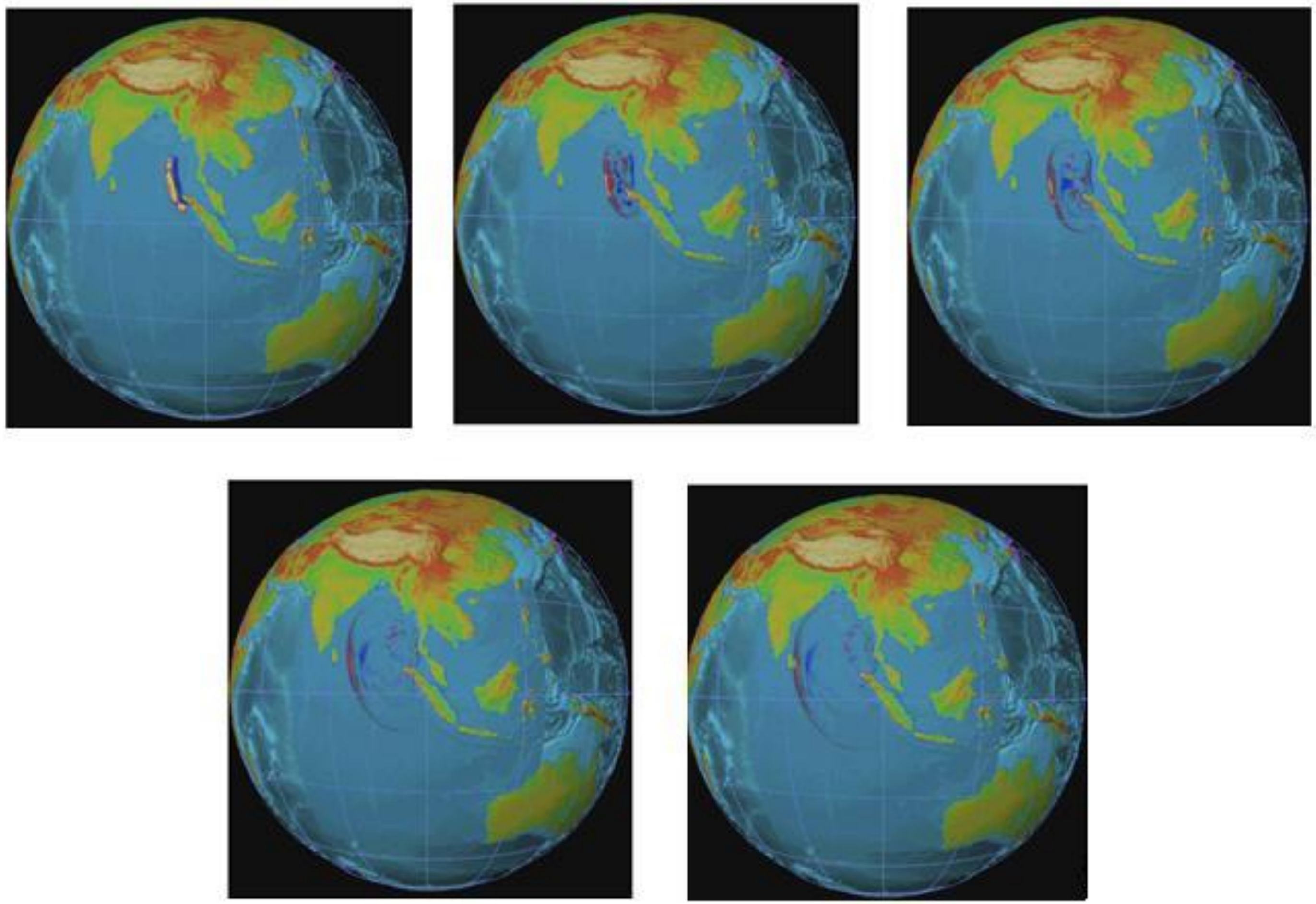
... ABER AUCH EIN MATHEMATISCH INTERESSANTES PHÄNOMEN





WORAUF BERUHEN SOLCHE SIMULATIONEN?



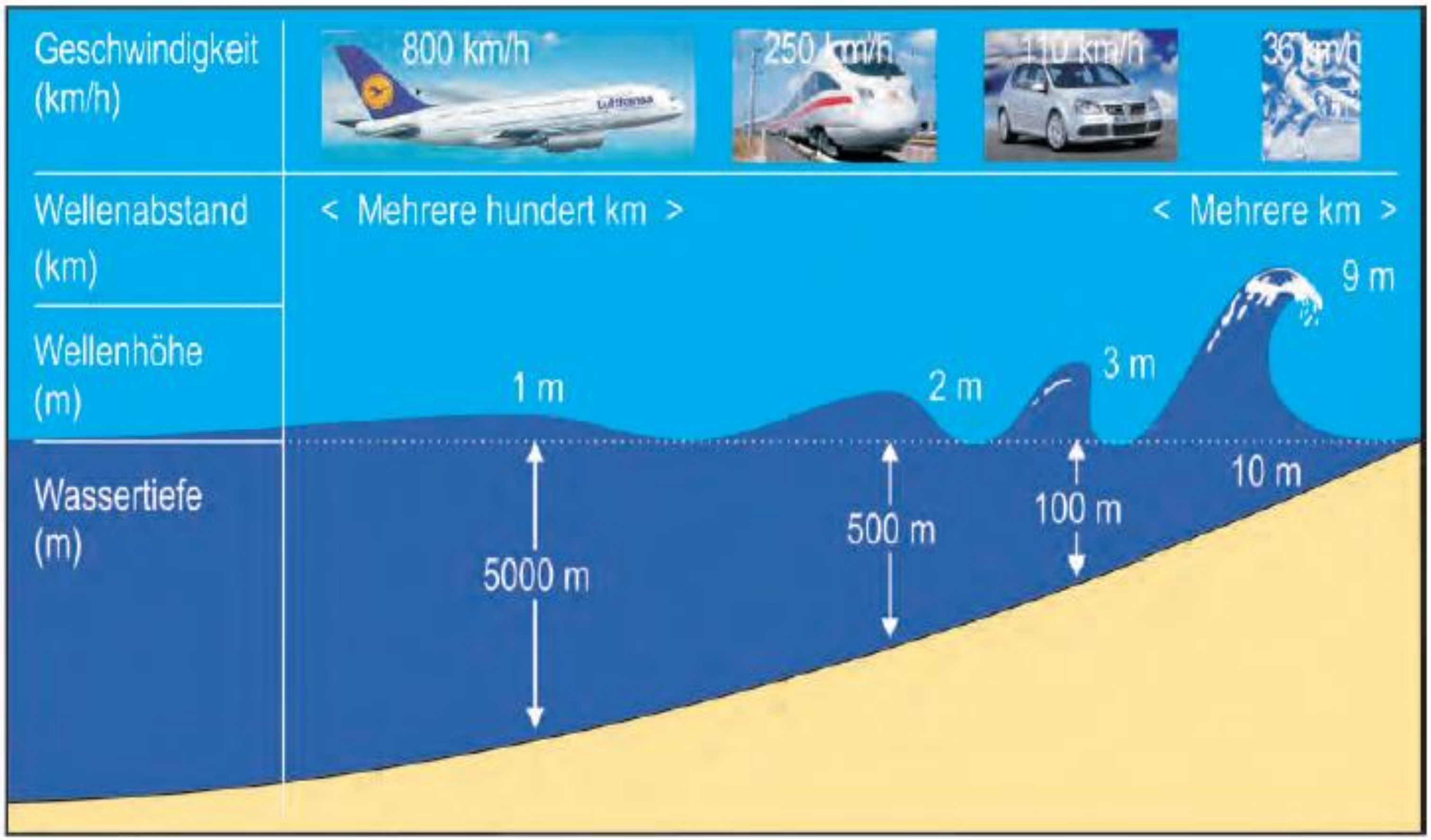


Computersimulationen beruhen auf mathematischen Modellen. Sie helfen uns Naturkatastrophen besser zu verstehen und können in der Zukunft Leben retten.

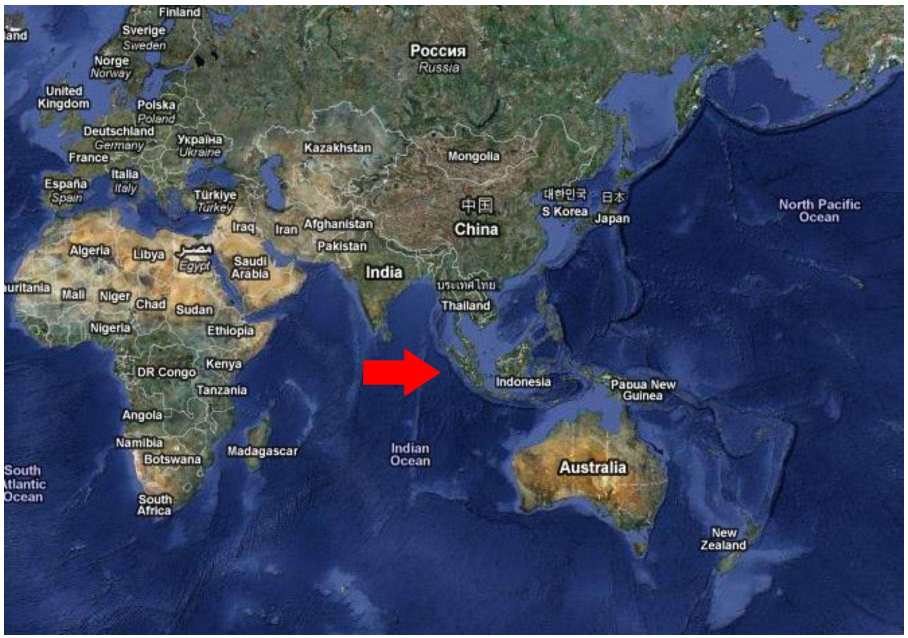
WENN WASSERMASSEN AUS DEM GLEICHGEWICHT GERATEN – ENTSTEHUNG EINER TSUNAMIWELLE

In etwa 90% aller Tsunamikatastrophen entsteht die Welle durch ein Seebeben. Dabei wird der Meeresboden angehoben und mit ihm die darüber befindliche Wassersäule. Als Folge gerät die gesamte Ozeantiefe in Schwingung, weil das Wasser aus seiner Gleichgewichtslage heraus bewegt wurde, (ganz ähnlich der Bewegung eines Federmasseschwingers). Diese Wassersäule kann auf offenem Ozean leicht 5 000 Meter überschreiten, entsprechend groß ist dann die Energie, die sich in Form der Tsunamiwelle in konzentrischen Kreisen um den Entstehungsort ausbreitet. Über dem tiefen Ozean ist die Tsunamiwelle düsenjet-schnell und wird durch die geringe Reibung im Wasser und einer besonders großen Wellenlänge kaum abgebremst. Innerhalb der flachen Küstengewässer reduziert die Welle ihre Geschwindigkeit drastisch, die Amplitude steigt an und die Wellen brechen schließlich über dem Land ein.

AUSBREITUNGSGESCHWINDIGKEIT EINES TSUNAMIS



TSUNAMIKATASTROPHE IN SÜDASIEN (DEZ. 2004)



On December 26, 2004 a strong earthquake with a magnitude between 9.1 and 9.3 west of Banda Aceh, Northern Sumatra in the Indian Ocean caused a series of tsunami which hit the adjacent coastlines. Indonesia is one of the most disaster-afflicted countries in the world. The earthquake rupture is consistent with a subduction zone along the Sunda deep sea trench. Due to the impact of the tsunami about 187,000 people lost their lives in Indonesia alone; the damage to property was estimated at 2.8 Billion Euros. Even distant countries such as Sri Lanka, 1,600 km away from the epicenter, suffered devastations by the tsunami.

The American Earthquake Information Centre (USGS) has given the following parameters:

DATE: 26. December 2004

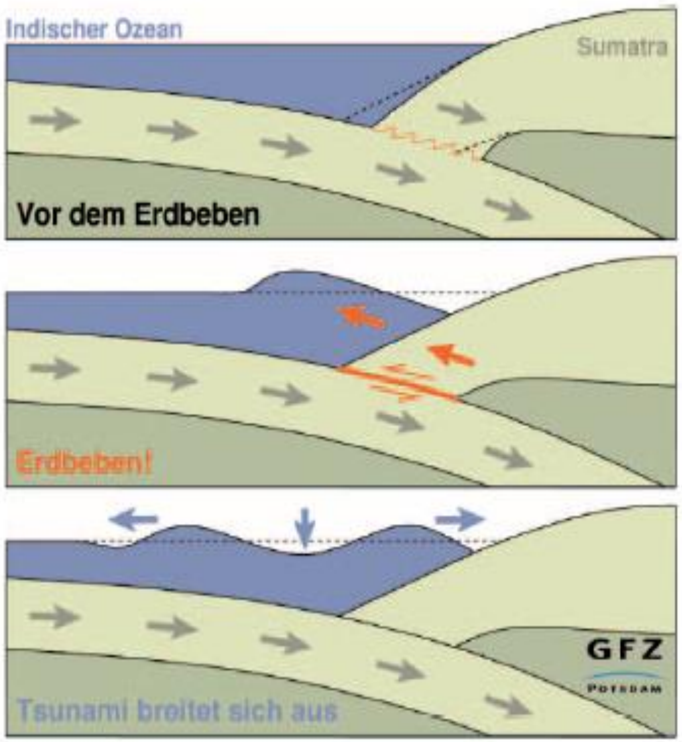
ORGININ TIME: 00:58 UTC

LATE/LONG: 3.267° North/ 95.821° East

DEPTH: 10 km

MAGNITUDE: 9.0

LOCALITY: 255 km SEE of Banda Aceh, Northern Sumatra



Der verheerende Tsunami überflutete rund 10.000 Kilometer Küstenregion im Indischen Ozean und forderte insgesamt mehr als 230.000 Todesopfer. Das Ausmaß des Seebebens war gewaltig. Der Meeresboden vor Sumatra wurde entlang eines Flurs von über 1000 Kilometern Länge und etwa 5 Metern Breite schlagartig um bis zu 10 Metern angehoben.

Zeitpunkt:

26. Dezember 2004, 1.59 Uhr MEZ
2.14 Uhr MEZ erreicht der Tsunami Sumatra
3.45 Uhr MEZ erreicht der Tsunami Sri Lanka

Lage des Epizentrums:

3.267° nördliche Breite, 95.821° östliche Breite
(ca. 150 km vor der Insel Sumatra)

Magnitude:

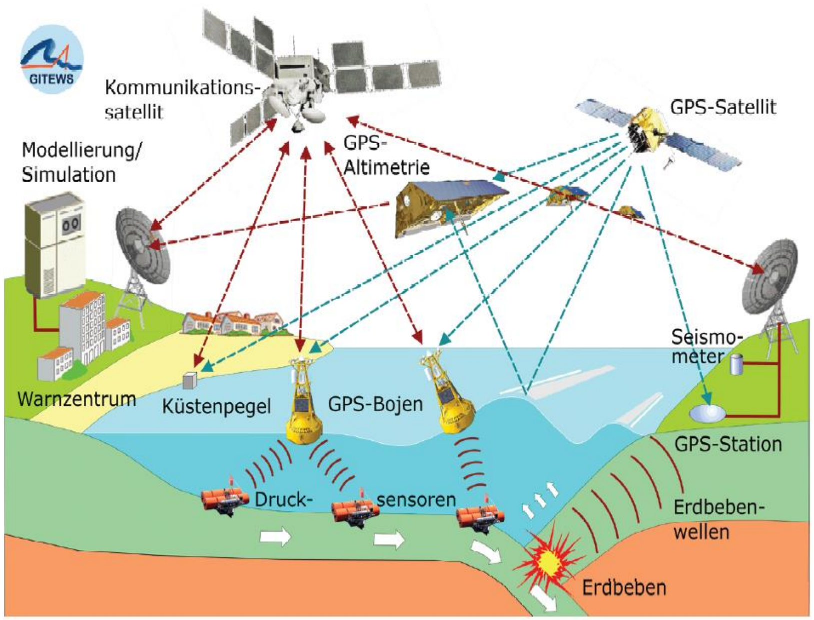
9,3 auf der Richterskala

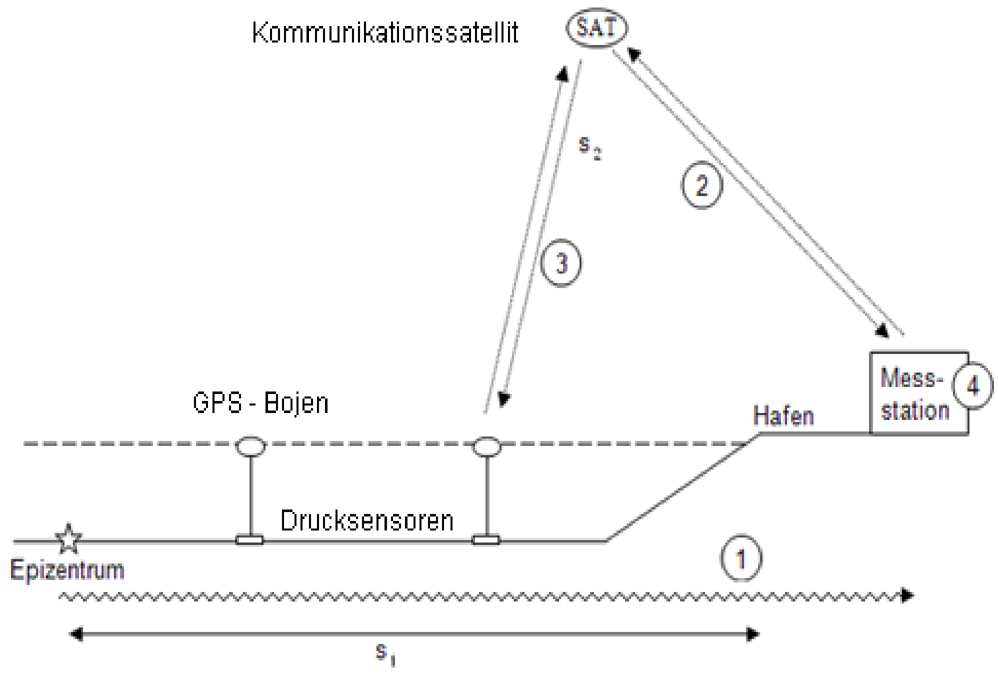
Ausmaß des Erdbebens:

Der Meeresboden wurden auf einer Strecke von rund 1200 km um bis zu 10 m angehoben.

FRAGESTELLUNG

Wie viel Zeit hätten die Menschen auf Sumatra zur Evakuierung gehabt, wenn es schon 2004 ein Frühwarnsystem gegeben hätte?





RECHERCHE NACH NEUEN INFORMATIONEN

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Tsunamis ist ausschließlich von der Ozeantiefe *h* abhängig und wird berechnet mit

$$v_T = \sqrt{g \cdot h}$$

- Die schnellsten Erdbebenwellen sind die P-Wellen, sie breiten sich mit etwa 5000-7000 m/s im Erdboden aus. Für die Modellierung wird eine Geschwindigkeit von 5000 m/s angenommen, um die notwendige mögliche Evakuierungszeit nach „unten" abzuschätzen.

- Ein geostationärer Satellit hat zur Erdoberfläche einen minimalen Abstand von 35786 km, wenn er über dem Empfänger im Zenit steht und einen maximalen Abstand von 41670 km am Horizont. Für die Modellierung wird ein Abstand von 40000 km zugrundegelegt. Da dieser Abstand wesentlich größer als jener zwischen Messstation und GPS-Boje ist, wird der Weg für die Satellitenübertragung für die Schritte 2 und 3 als gleich groß angenommen.
- Die Berechnung und Auswertung der Messdaten im Warnzentrum benötigen eine gewisse Mindestzeit, die konstant auf vier Minuten festgesetzt wird.

Für die mathematische Berechnung der Zeiten sind weitere Annahmen und Gleichungen nötig, die ohne Kenntnisse der Physik und der Geographie nicht zu leisten sind.

MATHEMATISIERUNG DER EVAKUIERUNGSZEIT

Gemäß dem physikalischen Modell benötigt eine <u>Tsunamiwelle</u> eine Zeit von

$$t_T = \frac{s_1}{v_T} = \frac{150000m}{\sqrt{g \cdot \bar{h}}} = \frac{150000m}{\sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 1925m}} \approx 1092\ s = 18{,}2\ \text{min},$$

um die Strecke vom Epizentrum bis zur Küste zurückzulegen.

Die vom <u>Warnsystem</u> benötigte Zeit setzt sich aus den einzelnen relevanten Zeiten zusammen, das heißt die Zeiten von t_1 bis t_4 für die Wege 1 bis 4 müssen addiert werden:

- Die Zeit , welche die seismische Welle bis zur Messstation benötigt, errechnet sich nach:

$$t_1 = \frac{s_1}{5000\frac{m}{s}} = \frac{150000m}{5000\frac{m}{s}} = 30s$$

- Da die Strecke zwischen Satellit und Messstation sowie Boje als gleichlang betrachtet wird, kann die benötigte Zeit für die Datenübertragung von der Messstation zur Boje über den Satelliten und zurück wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$t_{2+3} = 4 \cdot \frac{s_2}{c} \approx 4 \cdot \frac{40000000m}{300000000\frac{m}{s}} = 0{,}5\overline{3}s \approx 1s$$

- Die von der Messstation benötigte Rechenzeit wurde bereits in den getroffenen Annahmen festgelegt:

$$t_4 = 4\,min = 240\,s$$

- Durch Addition der einzelnen Zeitabschnitte erhält man die insgesamt vom Frühwarnsystem benötigte Zeit, bis eine Tsunamiwarnung ausgerufen werden kann:

$$t_{ges} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 30s + 1s + 240\,s$$

$$t_{ges} = 271s$$

$$\boxed{t_{ges} = 4\,min\;31\,s}$$

- Die zu bestimmende Zeit wurde bereits ermittelt, sodass keine Verarbeitungsphase nötig ist.

INTERPRETATION

Für eine Evakuierung der Bevölkerung ist die Zeitdifferenz zwischen Tsunamiwarnung und dem Auftreffen der Tsunamiwelle auf das Ufer entscheidend. In dem vorliegenden Beispiel beträgt diese Evakuierungszeit nur

$$t_{Evakuierung} = t_T - t_{ges} = 1092\,s - 271s = 821\,s = 13\,min\,41\,s$$

BESTIMMUNG DER MAXIMALEN ENTFERNUNG

Eine Tsunamiwelle benötigt nun im Mittel folgende Zeit für eine Strecke *D*:

$$t_T = \frac{D}{v_T} = \frac{D}{\sqrt{g \cdot \bar{h}}} = \frac{D}{\sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 3650m}} := f_1(D)$$

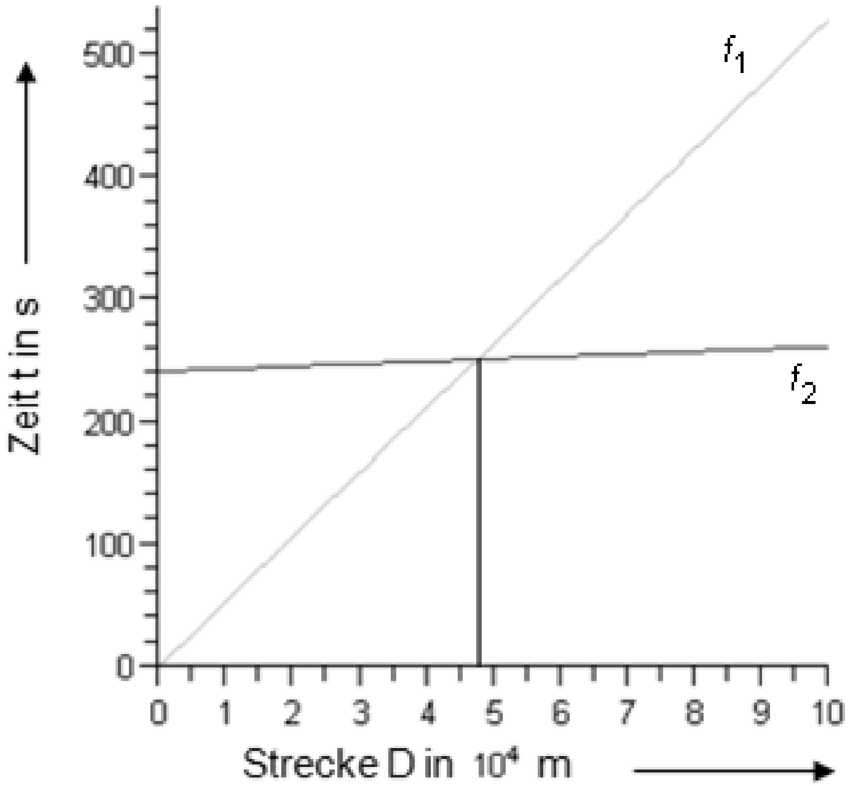
Die Komponenten 2 bis 4 werden von der Entfernung zum Epizentrum nicht beeinflusst. Lediglich die seismischen Wellen des Erdbebens müssen entsprechend der Strecke *s* mehr oder weniger Weg zurücklegen:

$$t_1 = \frac{D}{5000\frac{m}{s}}$$

Die vom Warnsystem benötigte Zeit lässt sich demnach darstellen mit:

$$t_{ges} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{D}{5000\frac{m}{s}} + 4 \cdot \frac{40000000}{300000000\frac{m}{s}} + 240\ s$$

$$\approx \frac{1}{5000\frac{m}{s}} \cdot D + \frac{3608}{15} s := f_2(D)$$

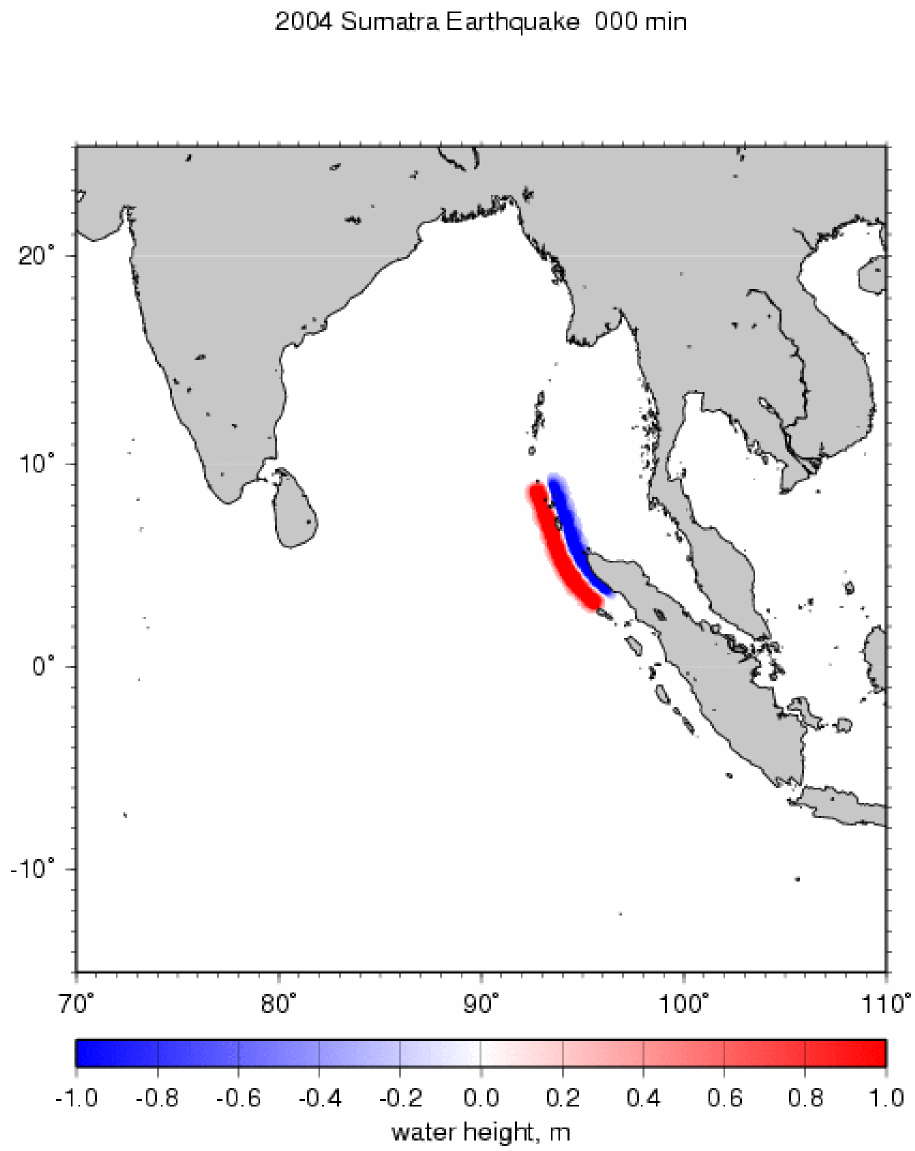


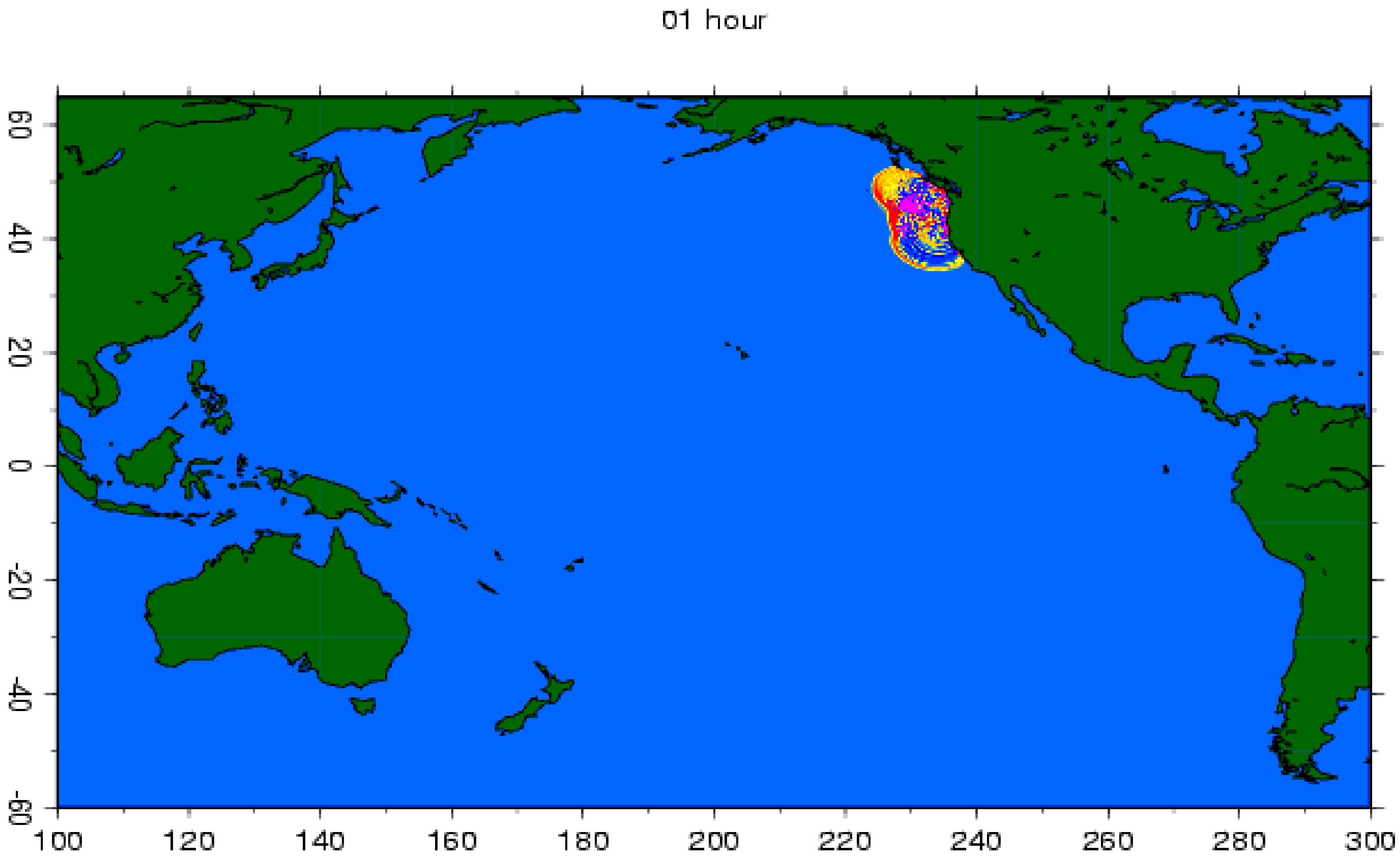
Schnittpunkt der Geraden an der Stelle D_S:

$$f_1(D_S) = f_2(D_S)$$

$$\frac{D_S}{\sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 3650m}} = \frac{1}{5000\frac{m}{s}}\cdot D_S + \frac{3608}{15}s$$

$$D_S \approx 47305\,m \approx 47\ km$$


2004 Sumatra Earthquake 000 min
20°
10°
0°
-10°
70°
80°
90°
100°
110°
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
water height, m


01 hour
60
40
20
0
-20
-40
-60
100
120
140
160
180
200
220
240
260
280
300

Mathematische Modellierung eines Tornados

Ein Tornado ist ein atmosphärisches Naturereignis mit schnell herumwirbelnden Winden um ein fast windstilles Zentrum. Die Windgeschwindigkeiten in einem solchen Tornado werden von Messstationen oder mobilen Dopplerradaren erfasst, an denen sich der Wirbelsturm vorbeibewegt. Die höchsten Windgeschwindigkeiten in der Nähe des Tornadozentrums sollen aus diesen Werten approximiert werden. Dafür muss ein Modell geschaffen werden, welches die Verteilung der Geschwindigkeiten in einem Tornado angibt.

Beaufort-Skala

Bft	Bezeichnung	Mittlere Windgeschwindigkeit (10-Minuten-Mittel)				Winddruck
		m/s	km/h	Landmeilen/h	Knoten	kg/m^2
0	Windstille	0 – 0,2	0 – 1	0 – 1	0 – 1	0
1	Leiser Zug	0,3 – 1,5	1 – 5	1 – 3	1 – 3	0 – 0,1
2	Leichter Wind	1,6 – 3,3	6 – 11	4 – 7	4 – 6	0,2 – 0,6
3	Schwacher Wind	3,4 – 5,4	12 – 19	8 – 12	7 – 10	0,7 – 1,8
4	Mäßiger Wind	5,5 – 7,9	20 – 28	13 – 18	11 – 15	1,9 – 3,9
5	Frischer Wind	8,0 – 10,7	29 – 38	19 – 24	16 – 21	4,0 – 7,2
6	Starker Wind	10,8 – 13,8	39 – 49	25 – 31	22 – 27	7,3 – 11,9
7	Steifer Wind	13,9 – 17,1	50 – 61	32 – 38	28 – 33	12,0 – 18,3
8	Stürmischer Wind	17,2 – 20,7	62 – 74	39 – 46	34 – 40	18,4 – 26,8
9	Sturm	20,8 – 24,4	75 – 88	47 – 54	41 – 47	26,9 – 37,3
10	Schwerer Sturm	24,5 – 28,4	89 – 102	55 – 63	48 – 55	37,4 – 50,5
11	Orkanartiger Sturm	28,5 – 32,6	103 – 117	64 – 72	56 – 63	50,6 – 66,5
12	Orkan	> 32,6	> 117	> 72	> 63	> 66,5

Saffir-Simpson-Hurrikanskala

SS	Bezeichnung	Mittlere Windgeschwindigkeit (1-Minuten-Mittel)			
		m/s	km/h	Landmeilen/h	Knoten
1	Schwach	32,7 – 42,6	118 – 153	73 – 95	64 – 82
2	Mäßig	42,7 – 49,5	154 – 177	96 – 110	83 – 96
3	Stark	49,6 – 58,5	178 – 209	111 – 130	97 – 113
4	Sehr stark	58,6 – 69,4	210 – 249	131 – 155	114 – 134
5	Verwüstend	> 69,4	> 249	> 155	> 134

Erweiterte Fujita-Tornadoskala

EF	Bezeichnung	Windgeschwindigkeit (3-Sekunden-Mittel)			
		m/s	km/h	Landmeilen/h	Knoten
0	Leicht	29 – 38	105 – 137	65 – 85	57 – 74
1	Mäßig	39 – 49	138 – 178	86 – 110	75 – 96
2	Stark	50 – 60	179 – 218	111 – 135	97 – 117
3	Verwüstend	61 – 74	219 – 266	136 – 165	118 – 143
4	Vernichtend	75 – 89	267 – 322	166 – 200	144 – 174
5	Katastrophal	> 89	> 322	> 200	> 174


© Copyright 2004 Eric Nguyen

Physikalische Betrachtung der Tornados

Gegenüberstellung der Bewegungsformen:

Translation		Rotation	
Weg	$\vec{s}$	Drehwinkel	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	m	Trägheitsmoment	J
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J \cdot \vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment	$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$
Kinetische Energie	$E_{Kin} = \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}^2$	Rotationsenergie	$E_{Rot} = \frac{1}{2} J\, \vec{\omega}^2$
Erhaltungsätze			
Impulssatz	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Drehimpulssatz	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$
wirkt von außen keine Kraft gilt:	$\vec{p}$ = const.	wirkt von außen kein Drehmoment gilt:	$\vec{L}$ = const.

Infolge der Erdrotation unterliegen Luftströmungen, Wärmeströmungen und bewegte Körper einer ablenkenden Kraft, der Sogenannten Corioliskraft.
Auf der nördlichen Halbkugel gilt: Luftströme, die sich vom Äquator weg- bzw. auf diesen hin bewegen, werden nach rechts abgelenkt. In Wirbelstürmen (siehe Abbildung), die auf der nördlichen Halbkugel toben, bewegen sich die Luftmassen folglich im Uhrzeigersinn. Die ablenkende Kraft steht sowohl senkrecht zur Windgeschwindigkeit als auch zur Winkelgeschwindigkeit der Erde. Es gilt:

$$\vec{F} = k \cdot (\vec{v} \, x \, \overrightarrow{w})$$

Allgemein nennt man die Verknüpfung von zwei Vektoren, deren Ergebnis wieder ein Vektor ist, „vektorielle Multiplikation“ und das Ergebnis „Vektorprodukt

Demnach kann das Situationsmodell ein Foto eines vergangenen Tornados sein, über den genauere Angaben bekannt sind. Im Weiteren wird von folgendem Szenario ausgegangen:

Ein Tornado der Stufe F0 auf der Fujita-Tornadoskala habe die Höchstgeschwindigkeit

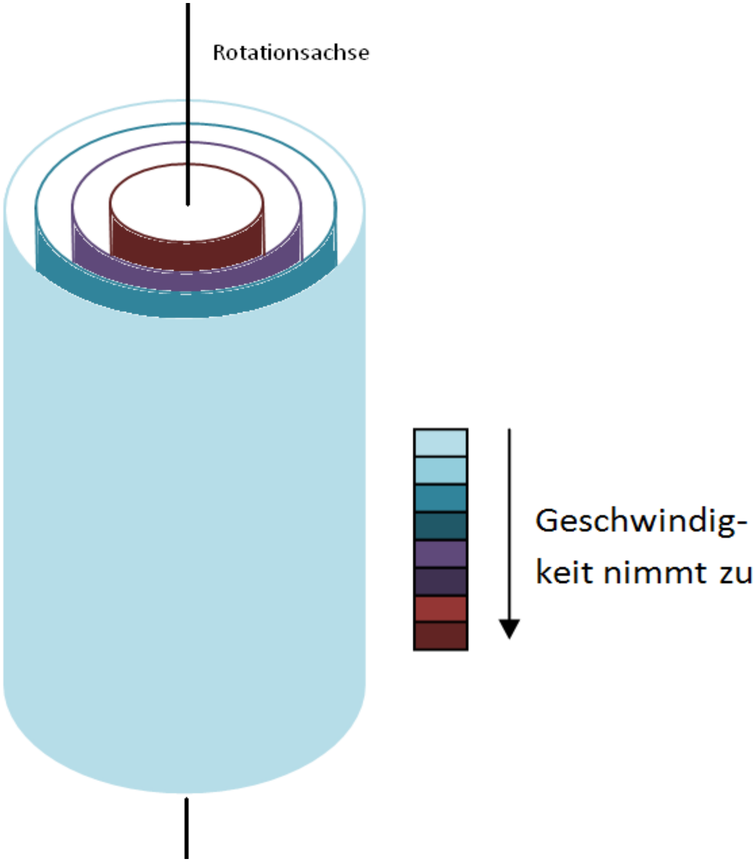
$$v_{max} = 105\ \frac{km}{h} \approx 29{,}2\ \frac{m}{s}$$

Das Ausmaß des Tornados sei mit folgenden Werten gegeben:

Radius des Zentrums: $r_{Zentrum} = 0{,}5\ m$

Radius des gesamten Tornados: $r_{Tornado} = 10\ m$

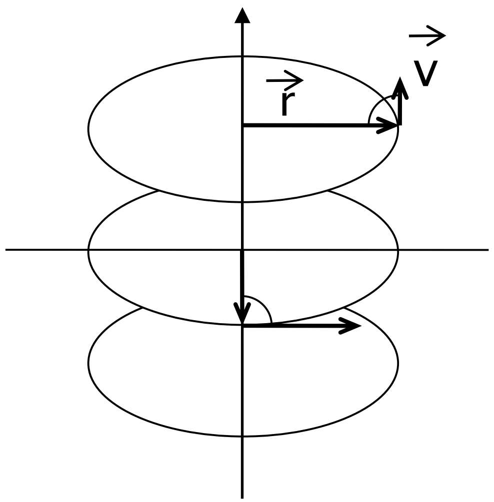
REALMODELL



Die Zylinder fassen dabei jeweils Luftpartikel mit der gleichen Geschwindigkeit zusammen, wobei die Geschwindigkeit der Winde von Außen nach Innen zunimmt.

Mathematisierung

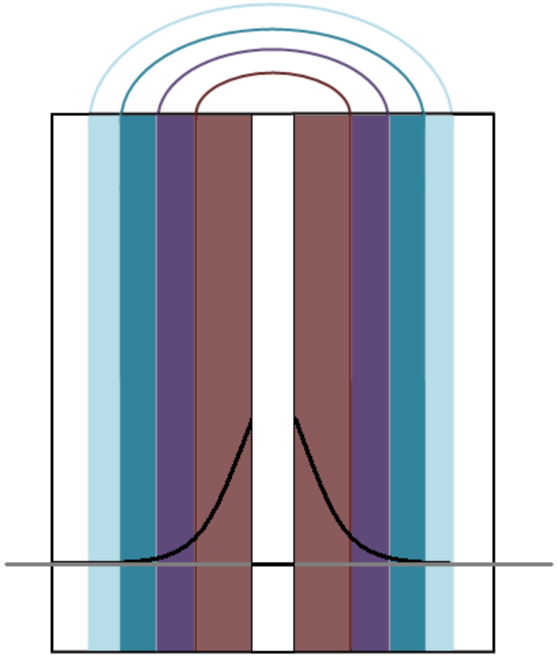
Für die Mathematisierung wird zunächst der Drehimpulserhaltungssatz näher betrachtet, denn dieser beinhaltet bereits eine mathematische Struktur in Form einer Gleichung.



$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Die Luftpartikel innerhalb einer zirkulierenden Luftmasse können als Massepunkte angesehen werden, dann gilt für den Drehimpuls jedes einzelnen Luftpartikels:

Daraus ergibt sich ein eindeutiges mathematisches Modell in Form einer indirekten Proportionalität zwischen dem Abstand *r* zum Rotationszentrum und der Geschwindigkeit *v* eines Luftpartikels mit der konstanten Masse *m*.



Mathematisches Modell:

$$v \sim \frac{1}{r}$$

Mit dem letztgenannten Ziel in der 3. Phase ist das zu lösende Problem für die Phase des mathematischen Arbeitens bereits festgelegt. Gesucht ist eine Funktion in der Form:

$$y = f(x)$$

wobei bereits bekannt ist, dass sich die Geschwindigkeit indirekt proportional zum Abstand *r* verhält. Die gesuchte Funktion ist also eine Hyperbelfunktion, die allgemein in der Form

$$y = a \cdot \frac{1}{x}$$

formuliert werden kann. (Die Proportionalität erlaubt keinen additiven Parameter.)

Weiterhin sind folgende Funktionswerte der Verteilung festgelegt:

für $-r_{Zentrum} < r < r_{Zentrum}$: $v = 0\,\frac{m}{s}$ und $v(r_{Zentrum}) = v_{max}$

und für $r > r_{Tornado} \wedge r < -r_{Tornado}$: $v = 0\,\frac{m}{s}$

Konkret am Beispiel:

$-0{,}5\ m < r < 0{,}5\ m : v = 0\ \frac{m}{s}$ und $v(r_{Zentrum}) = 29{,}2\ \frac{m}{s}$

und für $r > 10\ m \wedge r < -10\ m$: $v = 0\,\frac{m}{s}$

Übersetzt in das mathematische Modell:

$-0{,}5 < x < 0{,}5 \; : \; y = 0$ und $y(0{,}5) = 29{,}2$ sowie $y(-0{,}5) = 29{,}2$

und $x > 10 \;\wedge\; x < -10 : \; y = 0$ mit $D_f : x \in \mathcal{R}$

Das Modell ist eine abschnittsweise definierte Potenzfunktion.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \; -\infty < x < -10 \\ -14{,}6 \cdot \frac{1}{x} & : \; -10 \le x \le -0{,}5 \\ 0 & : \; -0{,}5 < x < 0{,}5 \\ 14{,}6 \cdot \frac{1}{x} & : \; 0{,}5 \le x \le 10 \\ 0 & : \; 10 < x < \infty \end{cases}$$

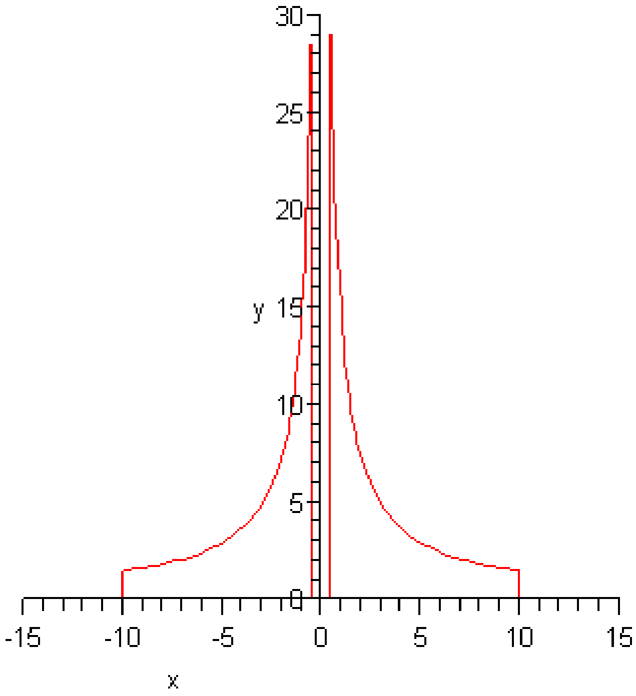
(In- und außerhalb des Tornadozentrums (Auge) ist es Windstill)

Für die restlichen Bereiche muss die Geschwindigkeitsverteilung entsprechend der oben genannte allgemeinen Funktion und der bekannten Größen konstruiert werden:

I: $f(-0{,}5) = 29{,}2 \longrightarrow 29{,}2 = a_1 \cdot \frac{1}{-0{,}5} \longrightarrow a_1 = -14{,}6$

II: $f(0{,}5) = 29{,}2 \longrightarrow 29{,}2 = a_2 \cdot \frac{1}{0{,}5} \longrightarrow a_2 = 14{,}6$

Stellt man diese Funktion mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems dar, erhält man folgende Darstellung:



Betrachtet man eine Funktion in einem dreidimensionalen Koordinatensystem in Abhängigkeit von zwei Variablen, dann kann eine Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Querschnittes durch den Tornado in der Form:

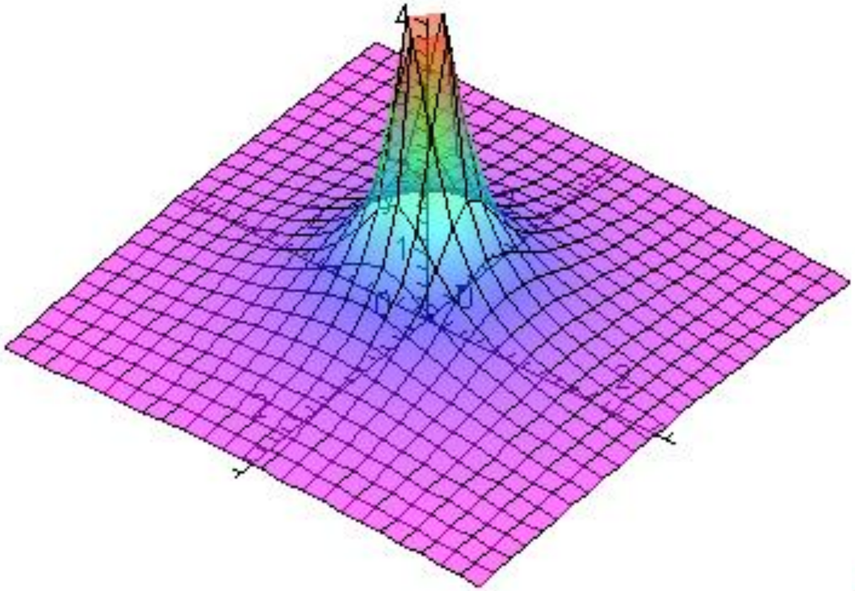
$$v = z = f(x,y)$$

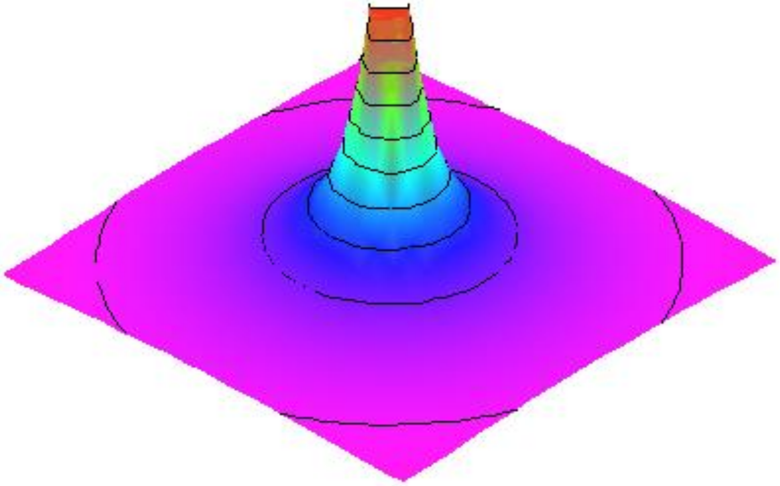
angegeben werden.

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt ferner:

$$z \sim \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Eine Darstellung jener Funktion könnte wie folgt aussehen.

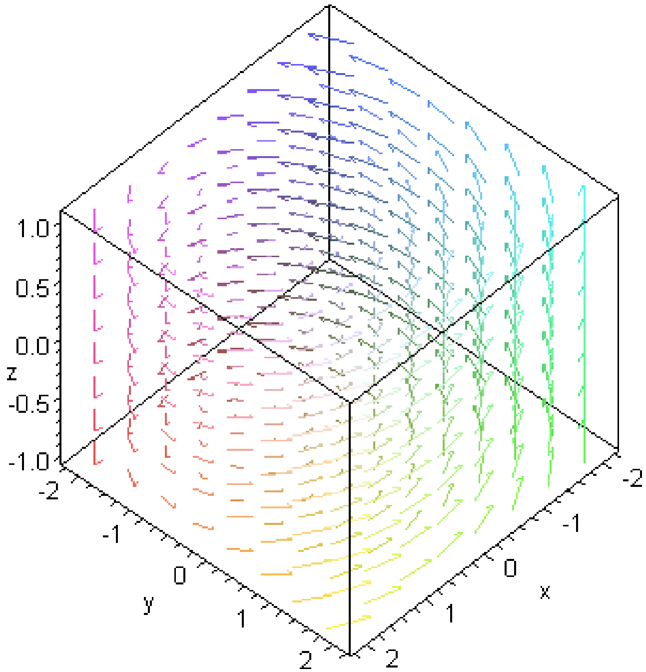


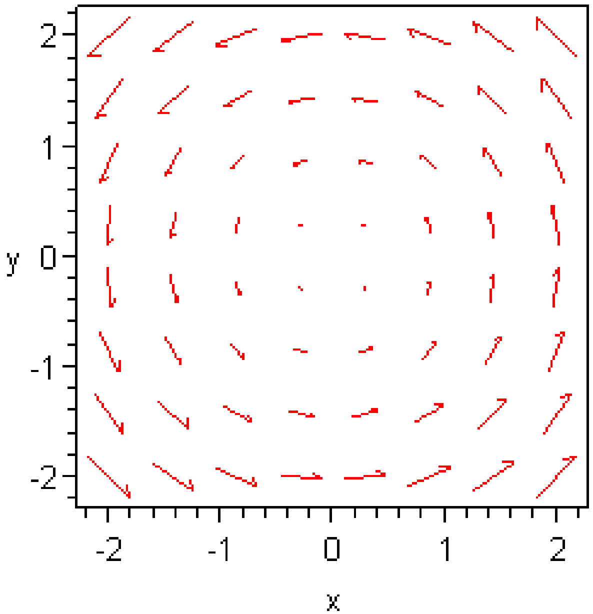


Eine weitere Form der Darstellung ist das Vektorfeld. Unter

$$\vec{v} = \vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$$

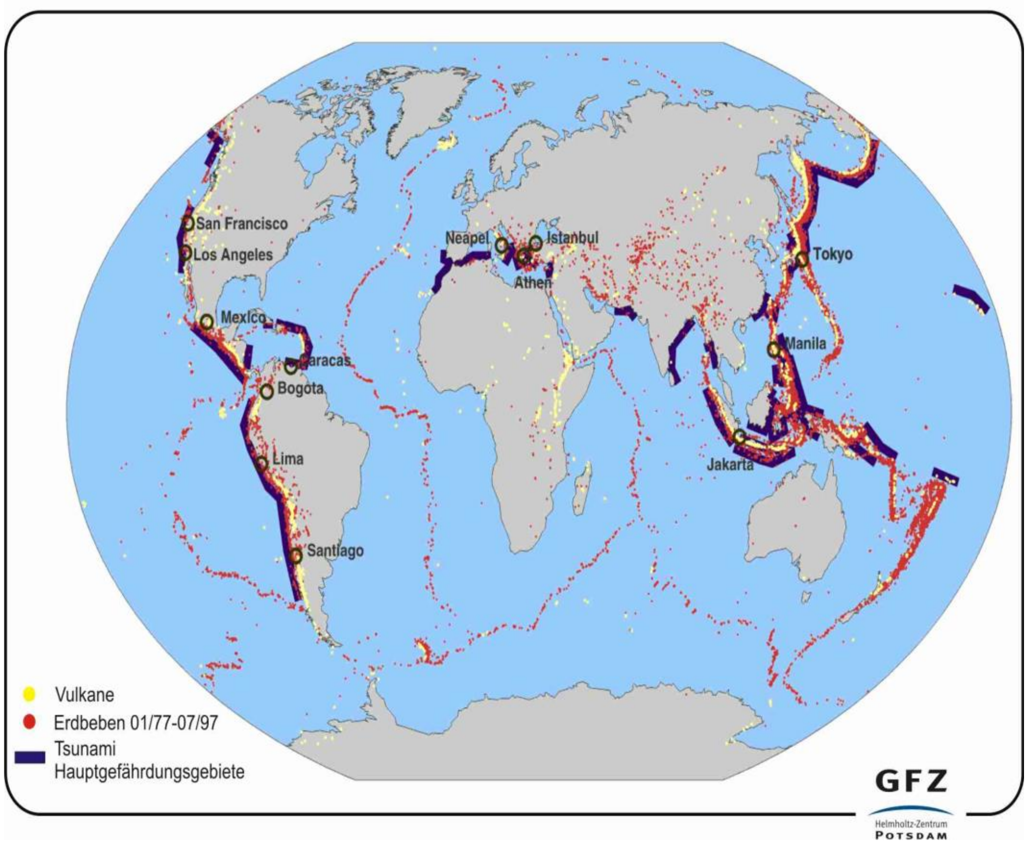
Berücksichtigung der getroffenen Annahmen und mathematischen Zusammenhänge, könnte ein entsprechendes mathematisches Modell wie folgt aussehen.

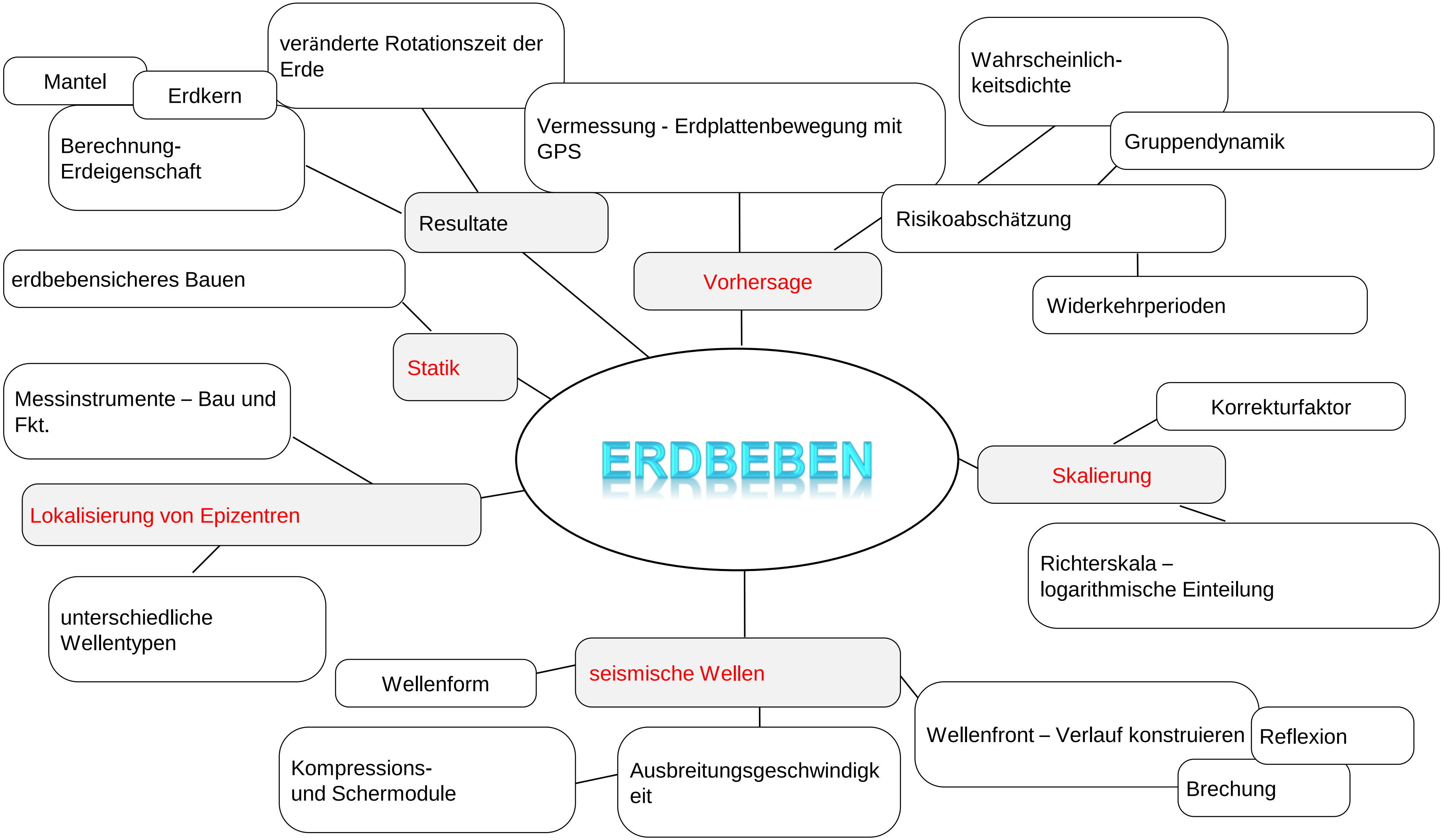




DIE ERDE BEBT….

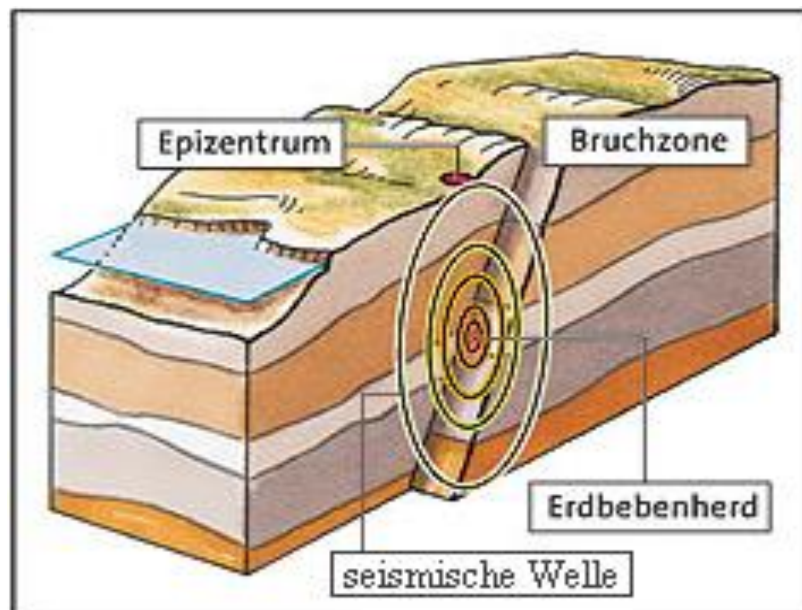
Erdbeben sind messbare Erschütterungen im Inneren des Erdkörpers. Der häufigste Grund für Erdbeben ist die Bewegung der Lithosphärenplatten auf dem zähflüssigen Erdmantel. Überall dort, wo Plattengrenzen aufeinander oder aneinander vorbei geschoben werden, kommt es immer wieder zur Entladung von Spannungen und damit zu Erdbeben.




ERDBEBEN
Vorhersage
Vermessung - Erdplattenbewegung mit GPS
Risikoabschätzung
Wahrscheinlich-keitsdichte
Gruppendynamik
Widerkehrperioden
Resultate
veränderte Rotationszeit der Erde
Berechnung-Erdeigenschaft
Mantel
Erdkern
Statik
erdbebensicheres Bauen
Lokalisierung von Epizentren
Messinstrumente – Bau und Fkt.
unterschiedliche Wellentypen
Skalierung
Korrekturfaktor
Richterskala – logarithmische Einteilung
seismische Wellen
Wellenform
Ausbreitungsgeschwindigkeit
Kompressions- und Schermodule
Wellenfront – Verlauf konstruieren
Reflexion
Brechung

Die Erschütterungen werden als seismische Wellen bezeichnet. Auf ihrem Weg durch das Erdinnere können diese Wellen gebrochen, reflektiert, gebeugt, gestreut, absorbiert und umgewandelt werden.

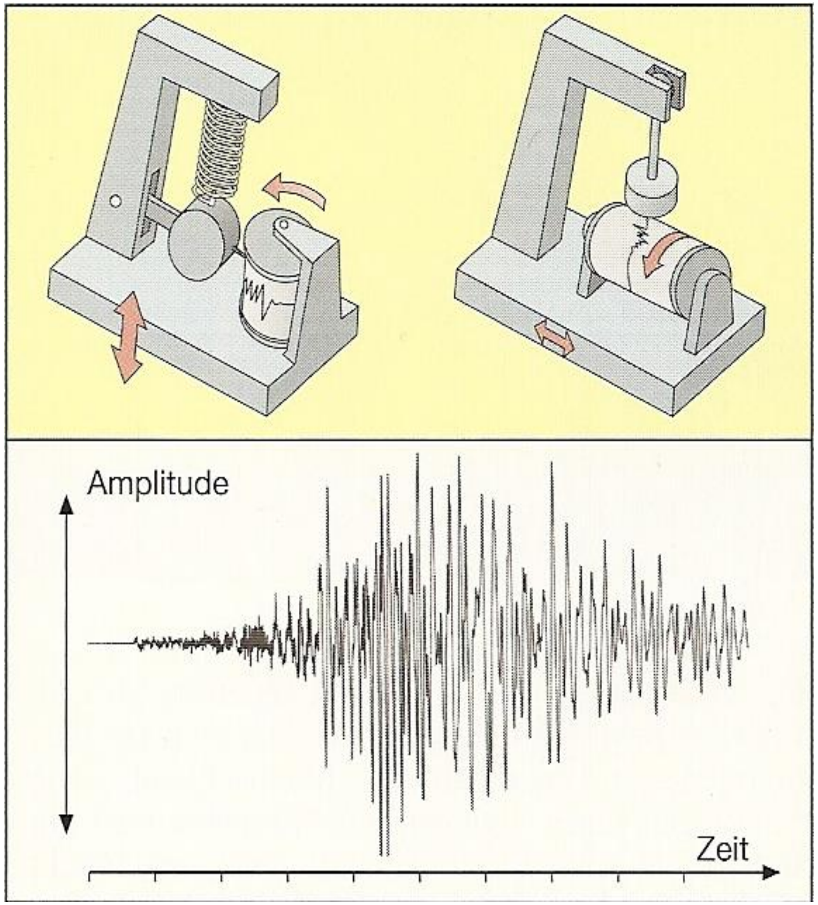
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen ist abhängig vom Wellentyp und vom Material, das die Wellen durchlaufen. Bei einem Erdbeben werden gleichzeitig schnelle Longitudinalwellen (P-Wellen) und langsame Transversalwellen (S-Wellen) ausgesendet.



Der Seismograph

Erdbebenwellen werden mit
Hilfe von Seismometern gemessen und aufgezeichnet. Die Bewegung eines Massestücks wurde mit einer Schreibspitze auf eine Drehtrommel übertragen.

Während bei einem Erdbeben das Gehäuse und die Papierrolle erschüttert werden, verharrt das träge Massestück, da es beweglich aufgehängt ist.



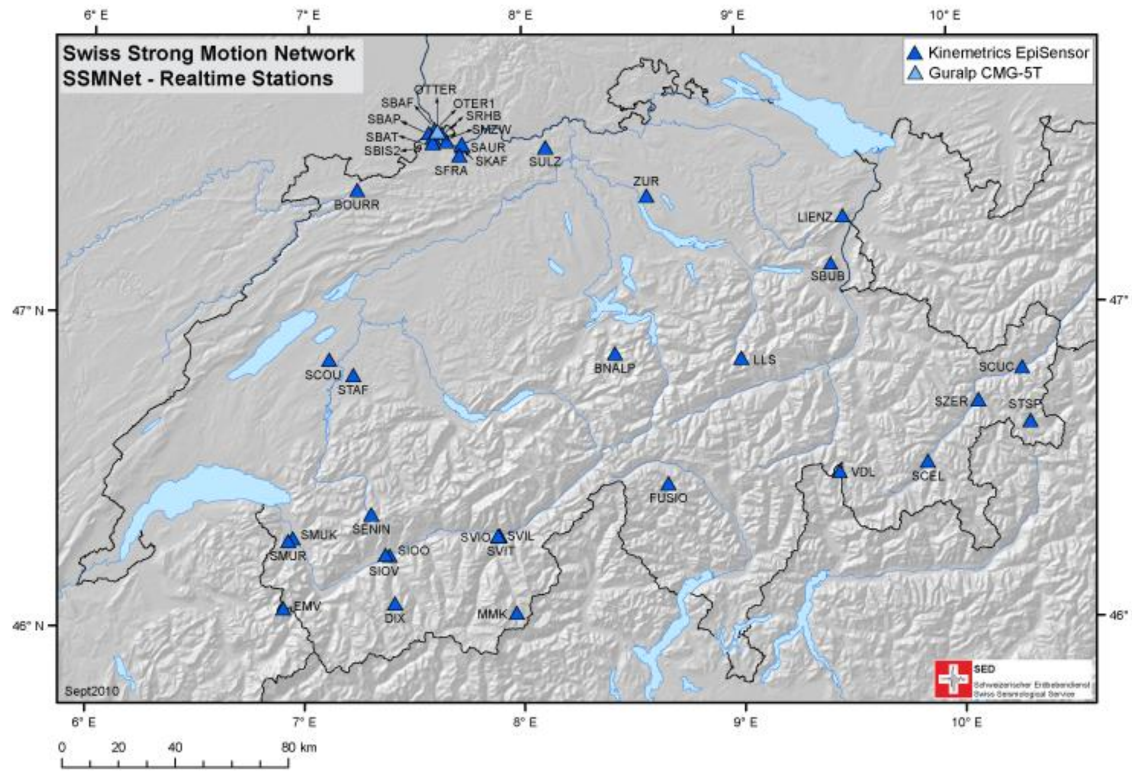
Mathematische Modellierung von Erdbeben

- Der Schweizer Erdbebendienst dokumentiert mit Hilfe unterschiedlicher Messstationen das Vorgehen in der Erdkruste. Am 06.12.2010 wurde ein Erdbeben, welches eine Lokal Magnitude von 3,1 aufwies, im Südwesten der Schweiz lokalisiert.

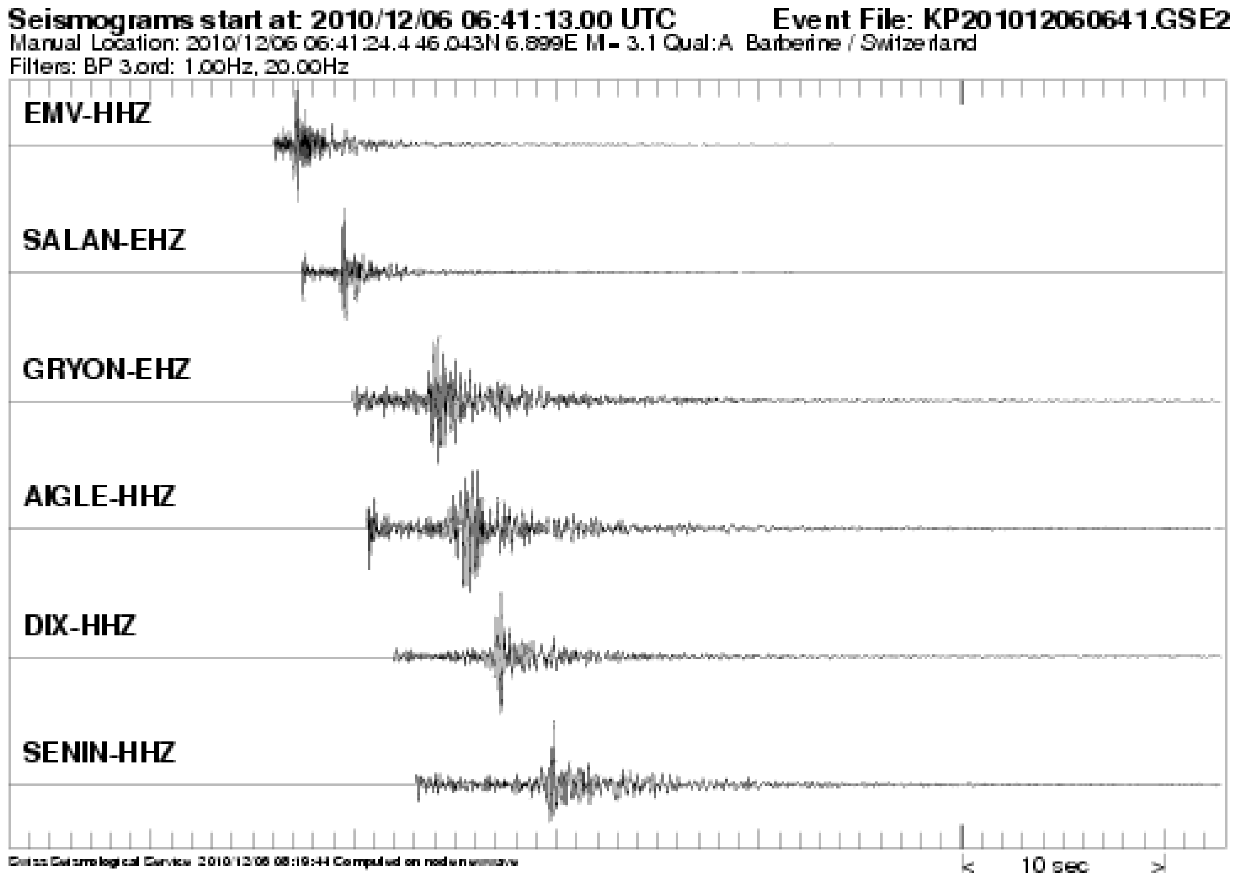
- Man bestimme aus der Lage der Messstationen und den Kenntnissen der für die P- und S-Wellen benötigten Zeit die Lage des Hypo- und des Epizentrums sowie die Tiefe des Bebens .

(Informationen unter http://www.seismo.ethz.ch)

Die Lokalisierung eines Erdbebens benötigt mindestens drei Messstationen, von denen man den Abstand zum Erdbebenherd kennt. Die Information dieser drei Distanzen lässt nur noch einen möglichen Punkt innerhalb der Erdkruste als Lösung zu.



Starkbebennetz des Schweizer Erdbebendienstes (Quelle: SED 2010)



Seismogramm für Ausgewählte Messstationen (Quelle: SED 2010)

MODELLREDUKTION

Zwecks Vereinfachung des Modells wird für die Aufgabe die geringste notwendige Anzahl von Messdaten gewählt. Dabei können entsprechend der gegebenen Daten drei Stationen beliebig gewählt werden. Für die folgende Berechnung wurden die Messstationen **EMV, SENIN** und **DIX** gewählt.

EMV: 46°3‘45‘‘ N, 6°53‘21‘‘ O entsprechen 46, 0625° N; 6,8892° O
SENIN: 46°19‘54‘‘ N, 7°17‘10‘‘ O entsprechen 46, 3317° N; 7,2861° O
DIX: 46°4‘48‘‘ N, 7°24‘0‘‘ O entsprechen 46, 08° N; 7,4 ° O

Die Recherche zu den seismischen Wellen und ihren Ausbreitungsgeschwindigkeiten in der Schweiz ergibt:

$$v_p = 6\,800\,\frac{m}{s}$$

$$v_s = 4300\,\frac{m}{s}$$

MATHEMATISIEREN

Die Daten werden in ein Koordinatensystem übertragen. Die Lokalisierung des Erdbebens wird über den Schnittpunkt dreier **Kugeln** um die jeweiligen Messstationen realisiert.

Die Längen- und Breitengrade werden in Kilometerabstände übertragen und die Erdoberfläche wird in dem relevanten Bereich als Ebene modelliert.

$$1\ L\ddot{a}ngengrad\ \hat{=}\ 77{,}2727\ km$$

$$1\ Breitengrad\ \hat{=}\ 111{,}3636\ km$$

Als Koordinatenursprung wird der Ort mit den Koordinaten 46° N und 6,5° O gewählt.
Die Abweichungen von diesem Punkt in Grad werden in Kilometer umgerechnet. Danach trägt man jene Werte in ein kartesisches Koordinatensystem ein, wobei 1 LE einem Kilometer entspricht.
Wegen der räumlichen Festlegung der x- und y-Achse werden zur besseren Vorstellungskraft die x-Achse mit der Breiten- und die y-Achse mit der Längenangabe belegt.

Messstation	geografische Koordinaten in ° (N/O)	Abstand von (46°,6°) in km	kartesische Koordinaten im Raum
EMV	46,0625	6,9602	A (6,96 | 30,07 | 0)
	6,8892	30,0745	
SENIN	46,3317	36,9393	B (36,94 | 60,74 | 0)
	7,2861	60,7441	
DIX	46,08	8,9091	C (8,91 | 69,55 | 0)
	7,4	69,5454	

Die Zeitdifferenzen zwischen der P- und S-Welle für die jeweiligen Stationen werden ermittelt. Für die drei ausgewählten gilt:

$$\Delta t_1 \approx 1{,}20\ s \qquad \Delta t_2 \approx 3{,}25\ s \qquad \Delta t_3 \approx 2{,}50\ s$$

Die Bewegung der Erdbebenwellen ist als gradlinig gleichförmig anzunehmen. Gemäß der üblichen Bewegungsgesetze und der Zeitdifferenz zwischen den beiden seismischen Wellen lässt sich ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Abstand zum Hypozentrum *x* und der Zeitdifferenz herleiten. Dabei gilt

$$t_P = \frac{x}{v_P} \qquad t_S = \frac{x}{v_S}$$

für die benötigte Zeit der jeweiligen Welle für den Weg vom Erdbebenherd und der Messstation.

Die Zeitdifferenz berechnet sich aus:

$$\Delta t = t_S - t_P$$

$$\Delta t = \frac{x}{v_S} - \frac{x}{v_P} = x \cdot \left(\frac{v_P - v_S}{v_S v_P}\right)$$

$$x = \frac{v_S v_P \, \Delta t}{v_P - v_S}$$

Mit den recherchierten Daten für die Geschwindigkeiten gilt dann:

$$x = 11696 \, \frac{m}{s} \cdot \Delta t$$

Die Abstände von den jeweiligen Messstationen sind die Radien der Kugeln um die Punkte A, B und C.

Station EMV: $x_1 = 11696\frac{m}{s} \cdot \Delta t_1 = 11696\frac{m}{s} \cdot 1{,}20s \approx 14\ km$

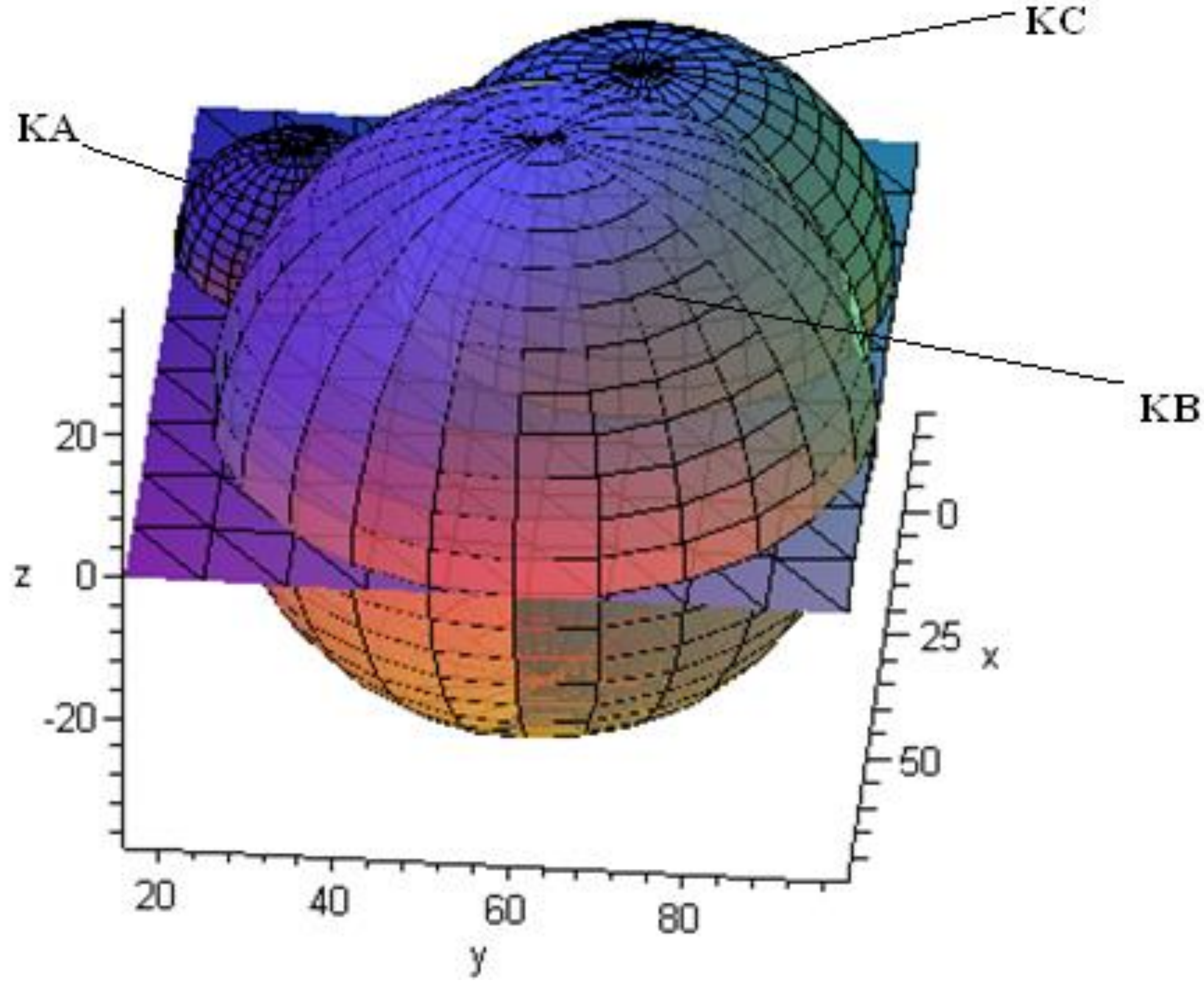
Station SENIN: $x_2 = 11696\frac{m}{s} \cdot \Delta t_2 = 11696\frac{m}{s} \cdot 3{,}25s \approx 38\ km$

Station DIX: $x_2 = 11696\frac{m}{s} \cdot \Delta t_3 = 11696\frac{m}{s} \cdot 2{,}50s \approx 29\ km$

Die Kugeln um die Punkte A, B und C seien mit KA, KB und KC bezeichnet, wobei ihre Radien

$$r_A = 14 \qquad r_B = 38 \qquad r_C = 29$$

sind. Die Erdoberfläche ist die Ebene E.


KC
KA
KB
20
0
-20
z
0
25
50
x
20
40
60
80
y

MODELLÖSUNG

Berechnung der Schnittpunkte mit Hilfe der Kugel-und Ebenengleichungen:

Für die allgemeine Kugelgleichung einer Kugel mit dem Radius *r* und dem Mittelpunkt $M\,(x_m, y_m, z_m)$ in kartesischen Koordinaten gilt:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r^2$$

Für die Kugeln KA-KC ergeben sich die vereinfachten Kugelgleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{KA:}\ & x^2 + y^2 + z^2 - 13{,}92\,x - 60{,}14\,y = -756{,}6465\\
\text{KB:}\ & x^2 + y^2 + z^2 - 73{,}88\,x - 121{,}48\,y = -3609{,}9112\\
\text{KC:}\ & x^2 + y^2 + z^2 - 17{,}82\,x - 139{,}10\,y = -4075{,}5906
\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte der Kugeln ergeben sich aus der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x^2+y^2+z^2-13{,}92\,x-60{,}14\,y & = & -756{,}6465 \\
\text{II} & x^2+y^2+z^2-73{,}88\,x-121{,}48\,y & = & -3609{,}9112 \\
\underline{\text{III}} & \underline{x^2+y^2+z^2-17{,}82\,x-139{,}10\,y} & = & \underline{-4075{,}5906} \\
 & 59{,}96\,x+61{,}34\,y & = & 2853{,}2647 \\
 & \underline{3{,}9\,x+78{,}96\,y} & = & \underline{3318{,}9441} \\
 & -1152{,}6194\,y & = & -48173{,}3257 \\
 & y & \approx & 41{,}7947 \\
 & x & \approx & 4{,}8295 \\
 & z^2 & = & 53{,}9903 \\
 & z_1 & \approx & 7{,}3478 \\
 & z_2 & \approx & -7{,}3478
\end{array}
$$

Daraus ergeben sich zwei Schnittpunkte zwischen den drei Kugeln:

$S_1(4{,}8295\,|41{,}7947\,|\;7{,}3478) \qquad S_2(4{,}82954|\;1{,}7947\;|-7{,}3478)$

Die Ebene E ist identisch mit der xy-Ebene und lässt sich in allgemeiner Parameterdarstellung als

$$E: z = 0$$

schreiben.

Die Projektionen der Schnittpunkte S_1 und S_2 fallen auf den Punkt

$$E(4{,}8295|41{,}7947|0)$$

zusammen.

INTERPRETATION DER MODELLÖSUNG

Die beiden Lösungen der Schnitte der Kugeln geben eine Lösung unterhalb der Erdoberfläche, also im Erdinneren, und einen Punkt zur Oberfläche gespiegelt in der Atmosphäre an. Der Punkt S_2, innerhalb der Erde, ist die Lösung für das Hypozentrum. Der Punkt E, die Projektion des Punktes in die Ebene, ist das Epizentrum

Im Längen- und Breitengradnetz der Erde ergibt sich:

- Epizentrum: $E(4{,}8295|41{,}7947|0) \triangleq$ 46,0434° N; 7,0409° O
- Hypozentrum: $S_2(4{,}8295\ 4|\ 1{,}7947\ |\ -7{,}3478) \triangleq$ **46,0434° N; 7,0409° O Tiefe: 7,35 km**

Validierung der Modellösung

Das Hypozentrums befindet sich in der Nähe der Messstationen. Auch die Tiefe ist realistisch.

Der Vergleich mit den gemessenen und veröffentlichten Daten des Bebens vom 06.12.2010 durch den Schweizer Erdbebendienst (SED) ergibt:

Date & Time: 2010/12/06 06:41:24 UTC

Latitude: **46.04 N** Longitude: **6.9 E**
Magnitude : 3.1 Magnitude Type : ML
Depth (Km): **8.0**