Maximale Semidefinite und Lineare Erweiterungskomplexität für Klassen von Polytopen

Gennadiy Averkov Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Forschung

Konvexität

Algebra

Optimierung

Algorithmen

Kombinatorik

G. A., Volker Kaibel, Stefan Weltge:
Maximum semidefinite and linear extension complexity
of families of polytopes,
erscheint in *Math. Programming A*

Volker Kaibel, OVGU Magdeburg

Stefan Weltge, ETH Zürich

Bezeichnungen

Bezeichnungen

d

Bezeichnungen

d Dimension von $\mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d Dimension von $\mathbb{R}^d$

$\langle x, y \rangle$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	Polytope mit Ecken in $Y \subseteq \mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y\rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y\rangle$
$x \le y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	Polytope mit Ecken in $Y \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \le y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	Polytope mit Ecken in $Y \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	beliebige Polytope in $\mathbb{R}^d$

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y\rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y\rangle$
$x \le y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	Polytope mit Ecken in $Y \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	beliebige Polytope in $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$	

Bezeichnungen

d	Dimension von $\mathbb{R}^d$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_2$	Euklidische Norm zu $\langle x, y \rangle$
$x \leq y$	Teilordnung auf $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{conv}(X)$	konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(Y)$	Polytope mit Ecken in $Y \subseteq \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	beliebige Polytope in $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$	0/1-Polytope in $\mathbb{R}^d$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben,

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$),

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$

Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$
Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\mathrm{conv}(X) =: P$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$
Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\mathrm{conv}(X) =: P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$
Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\mathrm{conv}(X) =: P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$
$\rightsquigarrow$ lineares Problem

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$

Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\operatorname{conv}(X) =: P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \le b\}$

$\rightsquigarrow$ lineares Problem

im Allgemeinen: $Ax \le b$ hat zu viele Ungleichungen 

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$

Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\mathrm{conv}(X) =: P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$

$\rightsquigarrow$ lineares Problem

im Allgemeinen: $Ax \leq b$ hat zu viele Ungleichungen

Lineare erweiterte Formulierungen

$P = \{x \in \mathbb{R}^d \, : \, Fx + Gy \leq h$ für ein $y \in \mathbb{R}^k\}$

Generisches (lineares) diskretes Optimierungsproblem

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich (implizit gegeben, oft $X \subseteq \{0,1\}^d$), $c \in \mathbb{R}^d$

Ziel: $\min\{\langle c, x\rangle : x \in X\}$

Polyedrischer Ansatz

Ersetze X durch $\mathrm{conv}(X) =: P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \le b\}$

$\rightsquigarrow$ lineares Problem

im Allgemeinen: $Ax \le b$ hat zu viele Ungleichungen 

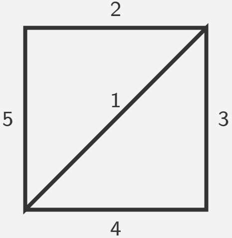
Lineare erweiterte Formulierungen

$P = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ Fx + Gy \le h$ für ein $y \in \mathbb{R}^k\}$

in vielen Situationen sehr hilfreich 

Beispiel: minimale Spannbäume

Graph mit Kanten $1, \dots, 5$



$c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$

Spannbäume char. Vektoren

$(1, 1, 1, 0, 0)$

$(1, 0, 0, 1, 1)$

$(1, 0, 1, 0, 1)$

$(1, 0, 1, 0, 1)$

$(0, 0, 1, 1, 1)$

$(0, 1, 1, 1, 0)$

$(0, 1, 1, 0, 1)$

$(0, 1, 0, 1, 1)$

- Problem minimaler Spannbäume

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop
- Das Spannbaumpolytop hat

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop
- Das Spannbaumpolytop hat
  - viele Facetten

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop
- Das Spannbaumpolytop hat
  - viele Facetten
  - aber eine kleine erweiterte Formulierung

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop
- Das Spannbaumpolytop hat
  - viele Facetten
  - aber eine kleine erweiterte Formulierung
- $\rightsquigarrow$ effiziente Reduktion zur linearen Optimierung möglich

- Problem minimaler Spannbäume
- $\rightsquigarrow$ lineare Optimierung über dem Spannbaumpolytop
- Das Spannbaumpolytop hat
  - viele Facetten
  - aber eine kleine erweiterte Formulierung
- $\rightsquigarrow$ effiziente Reduktion zur linearen Optimierung möglich
- Das gilt auch für andere Probleme

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

- $P = \pi(Q)$

Formulierung durch Projektionen

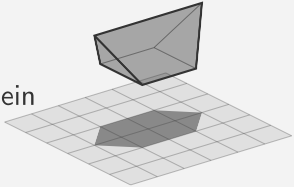
Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

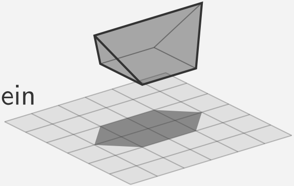
- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein



Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein

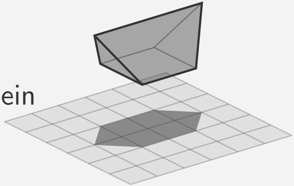


Formulierung mit Hilfe des Kegels $\mathbb{R}^k_+$

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein

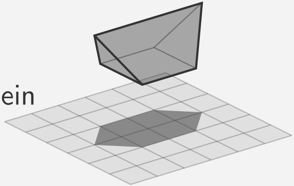


Formulierung mit Hilfe des Kegels $\mathbb{R}^k_+$

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden affine Abbildungen $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gesucht mit:

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:



- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein

Formulierung mit Hilfe des Kegels $\mathbb{R}^k_+$

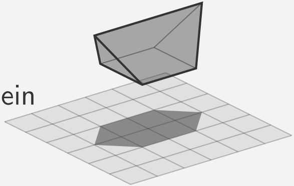
Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden affine Abbildungen $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gesucht mit:

- $P = \pi(Q)$, $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{R}^k_+\}$

Formulierung durch Projektionen

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden ein $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und eine affine Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gesucht, mit:

- $P = \pi(Q)$
- Anz. der Facetten von Q möglichst klein



Formulierung mit Hilfe des Kegels $\mathbb{R}^k_+$

Für ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ werden affine Abbildungen $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gesucht mit:

- $P = \pi(Q)$, $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{R}^k_+\}$
- k möglichst klein

Lineare erweiterte Formulierungen

Lineare erweiterte Formulierungen

Für $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt die Darstellung

$$P = \pi(Q), \qquad Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{R}^k_+\}$$

eine *lineare erweiterte Formulierung* der Größe k.

Lineare erweiterte Formulierungen

Für $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt die Darstellung

$$P = \pi(Q), \qquad Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{R}^k_+\}$$

eine *lineare erweiterte Formulierung* der Größe k.

Die *lineare Erweiterungskomplexität* $\mathrm{xc}(P)$ von $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist die kleinste Größe einer linearen erweiterten Formulierung von P.

Semidefinite erweiterte Formulierungen

Idee: ersetze $\mathbb{R}^k_+$ durch den Kegel

$$\mathbb{S}^k_+ := \left\{ S \in \mathbb{R}^{k \times k} \,:\, S \text{ symmetrisch, psd} \right\}.$$

Semidefinite erweiterte Formulierungen

Idee: ersetze $\mathbb{R}_+^k$ durch den Kegel

$$\mathbb{S}_+^k := \left\{ S \in \mathbb{R}^{k\times k} \,:\, S \text{ symmetrisch, psd} \right\}.$$

im Raum

$$\mathbb{S}^k := \left\{ S \in \mathbb{R}^{k\times k} \,:\, S \text{ symmetrisch} \right\}.$$

Semidefinite erweiterte Formulierungen

Idee: ersetze $\mathbb{R}^k_+$ durch den Kegel

$$\mathbb{S}^k_+ := \left\{ S \in \mathbb{R}^{k \times k} \ : \ S \text{ symmetrisch, psd} \right\}.$$

im Raum

$$\mathbb{S}^k := \left\{ S \in \mathbb{R}^{k \times k} \ : \ S \text{ symmetrisch} \right\}.$$

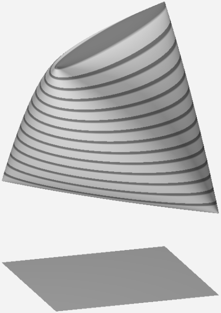
Die Darstellung

$$P = \pi(Q), \qquad Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}^k_+\}$$

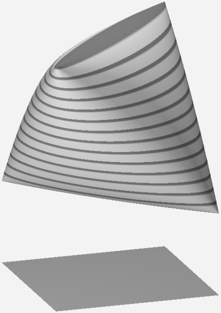
mit affinen Funktionen $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ und $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^k$, heißt eine *semidefinite Formulierung* von P der Größe k.

Die *semidefinite Erweiterungskomplexität* $\mathrm{sxc}(P)$ von P ist das kleinste k, für welches eine semidefinite Formulierung von P der Größe k existiert.

Die *semidefinite Erweiterungskomplexität* $\mathrm{sxc}(P)$ von P ist das kleinste k, für welches eine semidefinite Formulierung von P der Größe k existiert.



Die *semidefinite Erweiterungskomplexität* $\mathrm{sxc}(P)$ von P ist das kleinste k, für welches eine semidefinite Formulierung von P der Größe k existiert.



$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist psd}$$

Zusammenhang

$\mathrm{sxc}(P) \leq \mathrm{xc}(P)$

Zusammenhang

$\mathrm{sxc}(P) \leq \mathrm{xc}(P)$

Ein Beispiel mit $\mathrm{sxc}(P) < \mathrm{xc}(P)$

Für $P = [0,1]^d$ gilt $\mathrm{sxc}(P) = d + 1$ und $\mathrm{xc}(P) = 2d$.

Zusammenhang

$\text{sxc}(P) \leq \text{xc}(P)$

Ein Beispiel mit $\text{sxc}(P) < \text{xc}(P)$

Für $P = [0,1]^d$ gilt $\text{sxc}(P) = d + 1$ und $\text{xc}(P) = 2d$.

Offenes Problem: Wie groß kann der Unterschied sein?

Für einen Graphen $G = (V, E)$ betrachte

$$P_{\text{stab}}(G) := \text{conv}\{\chi_S \in \{0,1\}^V \ : \ S \text{ stabile Menge von } G\}.$$

Zusammenhang

$\mathrm{sxc}(P) \le \mathrm{xc}(P)$

Ein Beispiel mit $\mathrm{sxc}(P) < \mathrm{xc}(P)$

Für $P = [0,1]^d$ gilt $\mathrm{sxc}(P) = d + 1$ und $\mathrm{xc}(P) = 2d$.

Offenes Problem: Wie groß kann der Unterschied sein?

Für einen Graphen $G = (V, E)$ betrachte

$$P_{\mathrm{stab}}(G) := \mathrm{conv}\{\chi_S \in \{0,1\}^V \ : \ S \text{ stabile Menge von } G\}.$$

Ist G perfekt, so gilt $\mathrm{sxc}(P_{\mathrm{stab}}(G)) \le |V| + 1$.

Zusammenhang

$\mathrm{sxc}(P) \le \mathrm{xc}(P)$

Ein Beispiel mit $\mathrm{sxc}(P) < \mathrm{xc}(P)$

Für $P = [0,1]^d$ gilt $\mathrm{sxc}(P) = d + 1$ und $\mathrm{xc}(P) = 2d$.

Offenes Problem: Wie groß kann der Unterschied sein?

Für einen Graphen $G = (V, E)$ betrachte

$$P_{\mathrm{stab}}(G) := \mathrm{conv}\{\chi_S \in \{0,1\}^V \; : \; S \text{ stabile Menge von } G\}.$$

Ist G perfekt, so gilt $\mathrm{sxc}(P_{\mathrm{stab}}(G)) \le |V| + 1$.

Vermutung: $\mathrm{xc}(P_{\mathrm{stab}}(G))$ ist nicht polynomiell in $|V|$.

Resultate für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Resultate für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Theorem (Rothvoß (2011))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *mit* $\mathrm{xc}(P) \geq 2^{0.49d}$.

Resultate für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Theorem (Rothvoß (2011))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ mit $\mathrm{xc}(P) \geq 2^{0.49d}$.
(Darüber hinaus: lineare Erweteirungskomplexität eines zufälligen Polytops aus $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ exponentiell mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit.)

Resultate für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Theorem (Rothvoß (2011))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *mit* $\mathrm{xc}(P) \geq 2^{0.49d}$.
(Darüber hinaus: lineare Erweteirungskomplexität eines zufälligen Polytops aus $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *exponentiell mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit.)*

Theorem (Briët, Dadush, Pokutta (2013))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *mit* $\mathrm{sxc}(P) \geq 2^{0.24d}$.

Resultate für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Theorem (Rothvoß (2011))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *mit* $\mathrm{xc}(P) \geq 2^{0.49d}$.
(Darüber hinaus: lineare Erweteirungskomplexität eines zufälligen Polytops aus $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *exponentiell mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit.)*

Theorem (Briët, Dadush, Pokutta (2013))

Es existieren $P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *mit* $\mathrm{sxc}(P) \geq 2^{0.24d}$.
(Darüber hinaus: die semidefinite Erweiterungskomplexität eines zufälligen Polytops aus $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ *exponentiell mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit.)*

Hausdorff-Abstand

$\mathrm{dist}(A, B) :=$

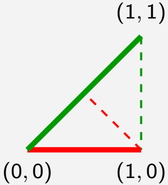
$\max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|_2, \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\|_2\}$

Hausdorff-Abstand

$\mathrm{dist}(A, B) :=$

$\max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\|a-b\|_2, \max_{b\in B}\min_{a\in A}\|a-b\|_2\}$

Beispiel:



Theorem (G.A. & Voker Kaibel & Stefan Weltge)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\dim(P) \geq 1$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und* $2 \leq |\mathcal{P}| < \infty$, *und seien* $\rho, \Delta > 0$ *Konstanten mit*

Theorem (G.A. & Voker Kaibel & Stefan Weltge)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\dim(P) \geq 1$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und* $2 \leq |\mathcal{P}| < \infty$, *und seien* $\rho, \Delta > 0$ *Konstanten mit*

- $P \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; \|x\|_2 \leq \rho\right\}$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und*

Theorem (G.A. & Voker Kaibel & Stefan Weltge)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\dim(P) \geq 1$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und* $2 \leq |\mathcal{P}| < \infty$, *und seien* $\rho, \Delta > 0$ *Konstanten mit*

- $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq \rho\}$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und*
- $\mathrm{dist}(P, P') \geq \Delta$ *für alle* $P, P' \in \mathcal{P}$, $P \neq P'$.

Theorem (G.A. & Voker Kaibel & Stefan Weltge)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\dim(P) \geq 1$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und* $2 \leq |\mathcal{P}| < \infty$, *und seien* $\rho, \Delta > 0$ *Konstanten mit*

- $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq \rho\}$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und*
- $\operatorname{dist}(P, P') \geq \Delta$ *für alle* $P, P' \in \mathcal{P}$, $P \neq P'$.

Dann gilt

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log |\mathcal{P}|}{8d\,(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|)}}$$

Theorem (G.A. & Voker Kaibel & Stefan Weltge)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\dim(P) \geq 1$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und* $2 \leq |\mathcal{P}| < \infty$, *und seien* $\rho, \Delta > 0$ *Konstanten mit*

- $P \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \|x\|_2 \leq \rho\right\}$ *für alle* $P \in \mathcal{P}$ *und*
- $\operatorname{dist}(P, P') \geq \Delta$ *für alle* $P, P' \in \mathcal{P}$, $P \neq P'$.

Dann gilt

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log |\mathcal{P}|}{8d\left(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|\right)}}$$

Der wichtigste Term: $\sqrt[4]{\log |\mathcal{P}|}$

... und für die lineare Erweiterungskomplexität gilt:

Theorem

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{xc}(P) \geq \sqrt{\frac{\log|\mathcal{P}|}{8d\,(1+\log(2\rho/\Delta)+\log\log|\mathcal{P}|)}}$$

Der wichtigste Term: $\sqrt{\log|\mathcal{P}|}$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \{ P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \, : \, \dim(P) \geq 1 \}$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \left\{P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \,:\, \dim(P) \geq 1\right\}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log |\mathcal{P}|}{8d\,(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|)}}$$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \{P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \ : \ \dim(P) \geq 1\}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log|\mathcal{P}|}{8d\left(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|\right)}}$$

- $|\mathcal{P}| = 2^{2^d} - 2^d - 1$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \{P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \, : \, \dim(P) \geq 1\}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log |\mathcal{P}|}{8d\,(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|)}}$$

- $|\mathcal{P}| = 2^{2^d} - 2^d - 1$
- $\rho = \sqrt{d}$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \left\{ P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \ : \ \dim(P) \geq 1 \right\}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log |\mathcal{P}|}{8d\,(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log |\mathcal{P}|)}}$$

- $|\mathcal{P}| = 2^{2^d} - 2^d - 1$
- $\rho = \sqrt{d}$
- $\Delta = \frac{1}{\sqrt{d}}$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

Sei $\mathcal{P} := \left\{P \in \mathcal{P}(\{0,1\}^d) \,:\, \dim(P) \geq 1\right\}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{\log|\mathcal{P}|}{8d\,(1 + \log(2\rho/\Delta) + \log\log|\mathcal{P}|)}}$$

- $|\mathcal{P}| = 2^{2^d} - 2^d - 1$
- $\rho = \sqrt{d}$
- $\Delta = \frac{1}{\sqrt{d}}$

$$\max_{P \in \mathcal{P}} \operatorname{sxc}(P) \geq \sqrt[4]{\frac{c \cdot 2^d}{\operatorname{poly}(d)}} \geq 2^{0.24d}$$

Anwendung für $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$

analog erhält man auch

Korollar

Ein zufälliges gleichmässig verteiltes P aus $\mathcal{P}(\{0,1\}^d)$ erfüllt die Ungleichung

$$\mathrm{Prob}(\mathrm{sxc}(P) \le 2^{0.24d}) \le 2^{-2^{d-1}},$$

wenn d genügend groß ist.

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}_+^k\}$

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}^k_+\}$

zu zeigen: k ist groß.

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}_+^k\}$
zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}^k_+\}$
zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}^k_+\}$

zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2 \leq 1\} \subseteq Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2 \leq n\}$

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}_+^k\}$

zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\} \subseteq Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le n\}$

(vgl. Löwner-John-Ellipsoide)

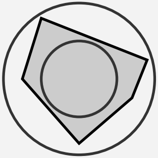
Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}_+^k\}$
zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\} \subseteq Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le n\}$
(vgl. Löwner-John-Ellipsoide)



Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}_+^k\}$

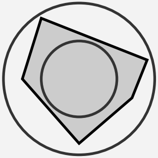
zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

$\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_2 \le 1\} \subseteq Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x\|_2 \le n\}$

(vgl. Löwner-John-Ellipsoide)



$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : A(y) + \mathbb{I} \in \mathbb{S}_+^k\}$,

Beweisidee (semidefiniter Fall)

Sei k derart, dass man für jedes $P \in \mathcal{P}$ die folgende Darstellung findet: $P = \pi(Q)$ mit $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : M(y) \in \mathbb{S}^k_+\}$

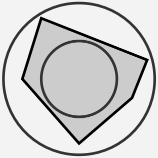
zu zeigen: k ist groß.

Wir normalisieren die Darstellung:

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist beschränkt

$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\} \subseteq Q \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le n\}$

(vgl. Löwner-John-Ellipsoide)



$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : A(y) + \mathbb{I} \in \mathbb{S}^k_+\}$,

und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^k$ linear

Wir parametrisieren die erweiterten Formulierungen

$\pi(y) = \varphi(y) + t$,

$t \in \mathbb{R}^d$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ linear

Wir parametrisieren die erweiterten Formulierungen

$\pi(y) = \varphi(y) + t$,
$t \in \mathbb{R}^d$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ linear

$\rightsquigarrow$ jede normalisierte semidefinite erweiterte Formulierung ist durch ein Tripel (A, φ, t) kodiert

Für die Parametriesierung gilt:

Für die Parametriesierung gilt:

Beschränktheit:

$$\|A\| \leq 1, \qquad \|\varphi\| \leq \rho, \qquad \|t\| \leq \rho$$

Für die Parametriesierung gilt:

Beschränktheit:

$$\|A\| \leq 1, \qquad \|\varphi\| \leq \rho, \qquad \|t\| \leq \rho$$

Lipschitz-Stetigkeit:

$$\operatorname{dist}(P, P') \leq \rho n^2 \|A - A'\| + n\|\varphi - \varphi'\| + \|t - t'\|$$

Wir führen einen Norm ein:

Für $w = (A, \varphi, t)$ sei $\|w\| := \rho n^2 \|A\| + n\|\varphi\| + \|t\|$

Wir führen einen Norm ein:

Für $w = (A, \varphi, t)$ sei $\|w\| := \rho n^2 \|A\| + n\|\varphi\| + \|t\|$

$\rightsquigarrow$ $\|w\| \le 3\rho n^2$ für alle normalisierten w

Wir führen einen Norm ein:

Für $w = (A, \varphi, t)$ sei $\|w\| := \rho n^2 \|A\| + n\|\varphi\| + \|t\|$

$\rightsquigarrow$ $\|w\| \le 3\rho n^2$ für alle normalisierten w

$\rightsquigarrow$ $\|w - w'\| \ge \Delta$ für alle normalisierten $w \ne w'$

Wir führen einen Norm ein:

Für $w = (A, \varphi, t)$ sei $\|w\| := \rho n^2 \|A\| + n\|\varphi\| + \|t\|$

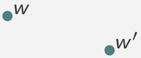
$\leadsto$ $\|w\| \leq 3\rho n^2$ für alle normalisierten w
$\leadsto$ $\|w - w'\| \geq \Delta$ für alle normalisierten $w \neq w'$

Dimension des Raums höchstens $3dk^4$

Fixiere ein w für jedes P

Fixiere ein w für jedes P

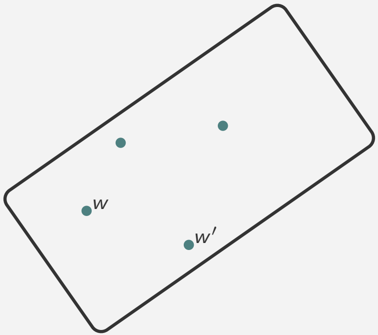
Fixiere ein w für jedes P



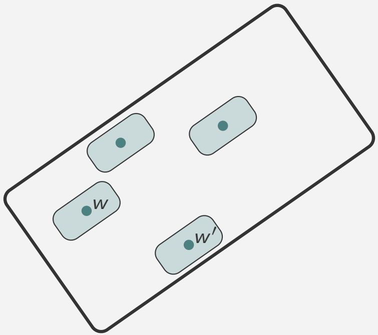
Fixiere ein w für jedes P

Fixiere ein w für jedes P

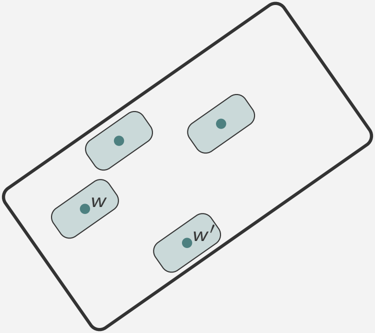
Fixiere ein w für jedes P



Fixiere ein w für jedes P

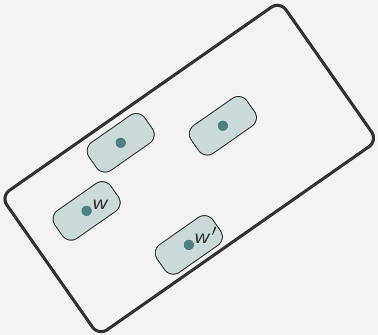


Fixiere ein w für jedes P



$\rightsquigarrow$ die Anzahl von w's ist beschränkt

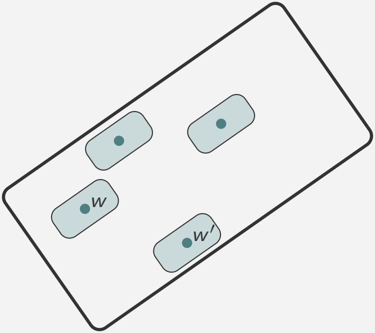
Fixiere ein w für jedes P



$\rightsquigarrow$ die Anzahl von w's ist beschränkt

$\rightsquigarrow$ $|\mathcal{P}| \leq f(k, d, \rho, \Delta)$

Fixiere ein w für jedes P

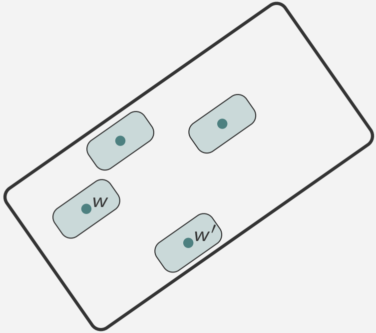


$\rightsquigarrow$ die Anzahl von w's ist beschränkt

$\rightsquigarrow$ $|\mathcal{P}| \le f(k, d, \rho, \Delta)$

$\rightsquigarrow$ untere Schranke an k mit Hilfe von $|\mathcal{P}|, d, \rho$ und Δ

Fixiere ein w für jedes P



$\rightsquigarrow$ die Anzahl von w's ist beschränkt

$\rightsquigarrow$ $|\mathcal{P}| \leq f(k, d, \rho, \Delta)$

$\rightsquigarrow$ untere Schranke an k mit Hilfe von $|\mathcal{P}|, d, \rho$ und Δ

$\square$

Einleitung

Erweteiterte Formulierungen, Motivation

Untere Schranken

Resultat

Anwendung für 0/1-Polytope

Beweisidee