Gitterpunktfreie Polyeder und Schnittebenentheorie gemischt-ganzzahliger Optimierungsprobleme

Gennadiy Averkov

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Minsk 2017

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (engl. MILP)

MILP

$$\min\left\{cx \;:\; x \in \mathbb{Z}_+^I \times \mathbb{R}_+^C, Ax = b\right\}$$

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (engl. MILP)

MILP

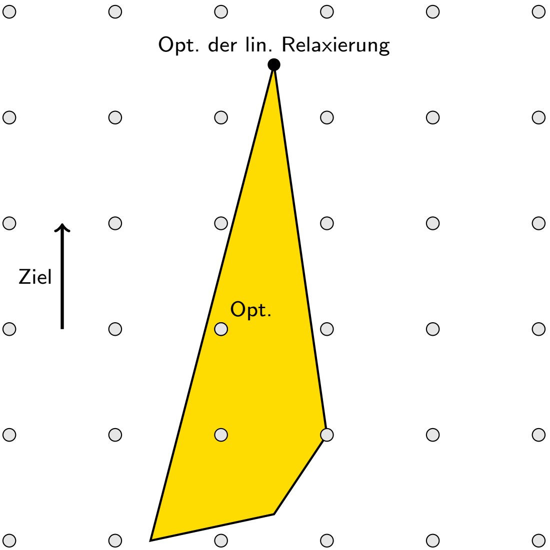
$$\min \left\{ cx \; : \; x \in \mathbb{Z}_+^I \times \mathbb{R}_+^C, Ax = b \right\}$$

Schnittebenen (gültige Ungleichungen)

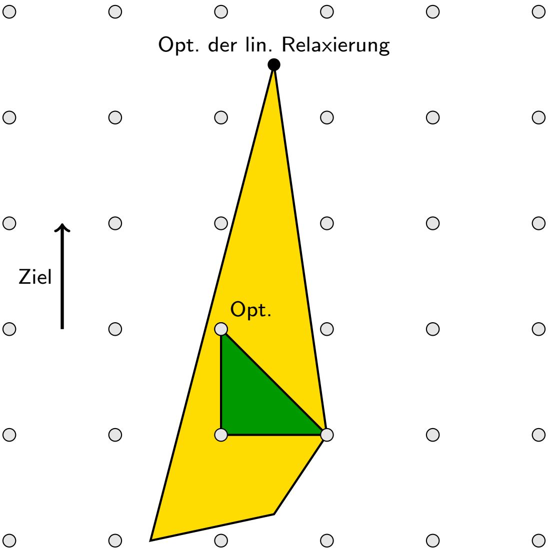
Lineare Ungleichungen für

$$\left\{ x \in \mathbb{Z}_+^I \times \mathbb{R}_+^C \; : \; Ax = b \right\}$$

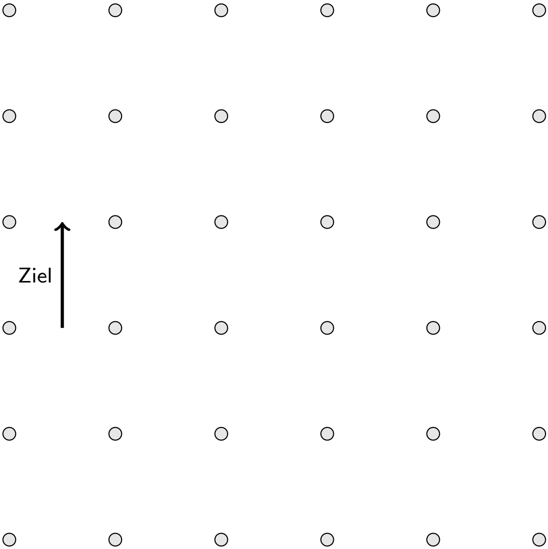
Polyedrische Sichtweise



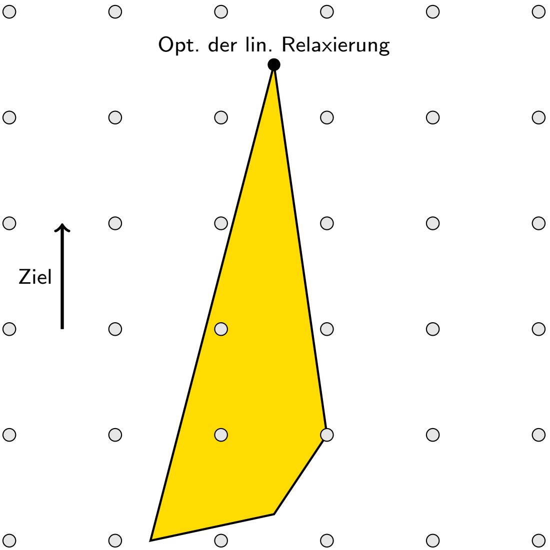
Gemischt-ganzzahlige Hülle vs. Originalpolyeder



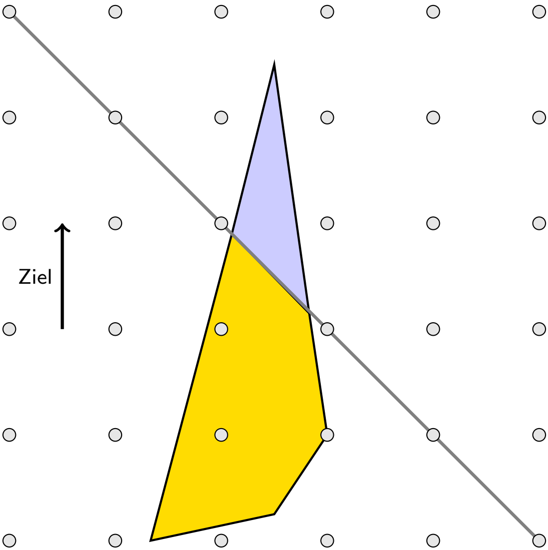
Schnittebenen (gültige Ungleichungen)



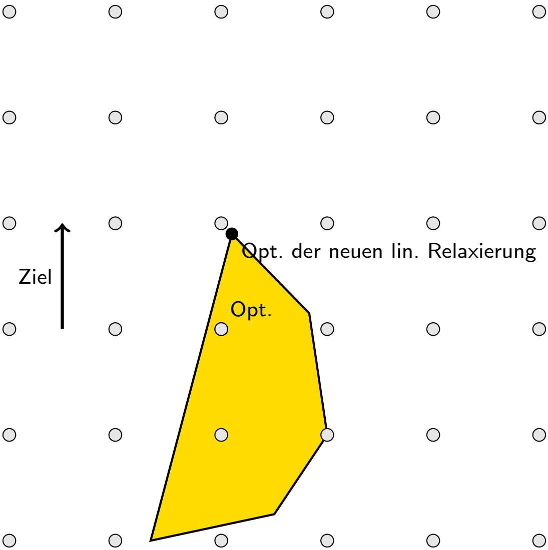
Schnittebenen (gültige Ungleichungen)



Schnittebenen (gültige Ungleichungen)



Schnittebenen (gültige Ungleichungen)



Gemischt-ganzzahlige Menge

Ansatz von Gomory & Johnson

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$
- $s = (s_i)_{i \in \{1,\dots,k\}}$

Ansatz von Gomory & Johnson

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$
- $s = (s_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$
- $y = (y_j)_{j \in \{1,\ldots,\ell\}}$

Ansatz von Gomory & Johnson

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$
- $s = (s_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$
- $y = (y_j)_{j \in \{1,\ldots,\ell\}}$
- $R = (r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Ansatz von Gomory & Johnson

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$
- $s = (s_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$
- $y = (y_j)_{j \in \{1,\ldots,\ell\}}$
- $R = (r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$
- $P = (p_1, \ldots, p_\ell) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$

Gemischt-ganzzahlige Menge

- $f \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$
- $s = (s_i)_{i \in \{1,\dots,k\}}$
- $y = (y_j)_{j \in \{1,\dots,\ell\}}$
- $R = (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$
- $P = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$
- Die *gemischt-ganzzahlige Menge* von (R, P) bzgl. f:

$$X_f(R,P) := \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Wie entsteht $X_f(R, P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Wie entsteht $X_f(R, P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R, P)$

Wie entsteht $X_f(R, P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \; : \; f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R, P)$

1. Formuliere MILP mit $x \in \mathbb{Z}^I \times \mathbb{R}^C$, $x \geq 0$, $Ax = b$.

Wie entsteht $X_f(R,P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{Z}^\ell_+ \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R,P)$

1. Formuliere MILP mit $x \in \mathbb{Z}^I \times \mathbb{R}^C$, $x \geq 0, Ax = b$.
2. Führe die Simplex-Methode auf der linearen Relaxierung aus.

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R, P)$

1. Formuliere MILP mit $x \in \mathbb{Z}^I \times \mathbb{R}^C$, $x \geq 0, Ax = b$.
2. Führe die Simplex-Methode auf der linearen Relaxierung aus.
3. Basis-Variablen x_B vs. Nichtbasis-Variablen x_N:

$$x_B = Ux_N + v.$$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{Z}^\ell_+ \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R, P)$

1. Formuliere MILP mit $x \in \mathbb{Z}^I \times \mathbb{R}^C$, $x \geq 0, Ax = b$.
2. Führe die Simplex-Methode auf der linearen Relaxierung aus.
3. Basis-Variablen x_B vs. Nichtbasis-Variablen x_N:

$$x_B = U x_N + v.$$

4. Kontinuierliche Basis-Variablen werden eliminiert.

Wie entsteht $X_f(R,P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^k s_i r_i + \sum_{j=1}^\ell y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Der Weg zu $X_f(R,P)$

1. Formuliere MILP mit $x \in \mathbb{Z}^I \times \mathbb{R}^C$, $x \geq 0, Ax = b$.
2. Führe die Simplex-Methode auf der linearen Relaxierung aus.
3. Basis-Variablen x_B vs. Nichtbasis-Variablen x_N:

$$x_B = Ux_N + v.$$

4. Kontinuierliche Basis-Variablen werden eliminiert.
5. Nicht-Negativität der ganzzahligen Basis-Variablen wird vernachlässigt (denn $\mathbb{Z}^n$ ist besser als $\mathbb{Z}_+^n$).

Erzeugung von gültigen linearen Ungleichungen für $X_f(R, P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{Z}_+^\ell \ : \ f + \sum_{i=1}^{k} s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Erzeugung von gültigen linearen Ungleichungen für $X_f(R,P)$

$$X_f(R,P) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{Z}^\ell_+ \, : \, f + \sum_{i=1}^{k} s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Schnitt-erzeugendes Paar (Gomory, Johnson)

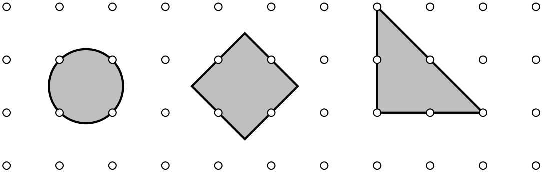
(ψ, π) mit $\psi, \pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Schnitt-erzeugendes Paar*, wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \psi(r_i) s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \pi(p_j) y_j \geq 1 \qquad \forall (s,y) \in X_f(R,P) \ \forall R \ \forall P$$

Gitterpunkfreie Mengen

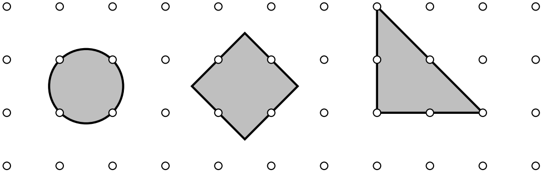
Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heißt *gitterpunkftfrei* (*gpf*), falls für B gilt:

- $\mathrm{int}(B) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$
- B ist konvex, abgeschlossen und n-dimensional.



Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heißt *gitterpunkftfrei* (*gpf*), falls für B gilt:

- $\mathrm{int}(B) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$
- B ist konvex, abgeschlossen und n-dimensional.



maximale gitterpunktfreie Menge

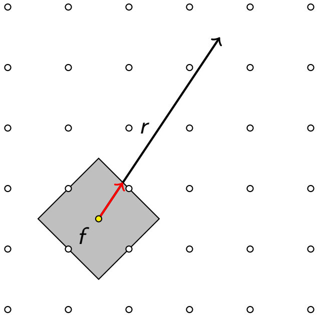
Eine gitterpunkfreie Teilmenge B heißt *maximal gitterpunkfrei* (*max-gpf*), falls B in keiner gitterpunkfreien Menge echt enthalten ist.

Eichfunktion

Definition: Eichfunktion

Die *Eichfunktion* von $B - f$ für $f \in \mathrm{int}(B)$:

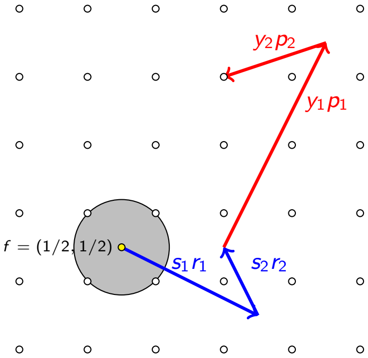
$$\psi_{B-f}(r) := \inf\{\alpha > 0 : r \in \alpha(B - f)\}.$$



Bemerkung:

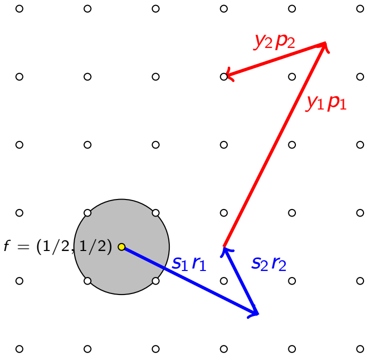
Sei B gpf Menge und $f \in \mathrm{int}(B)$. Dann ist (ψ, π) mit $\psi = \pi = \psi_{B-f}$ Schnitt-erzeugend.

Beispiel zu $\psi = \pi = \psi_{B-f}$



$$f = (1/2, 1/2), \quad R = (r_1, r_2), \quad P = (p_1, p_2), \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x - f\| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

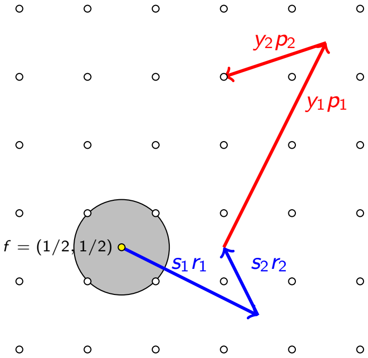
Beispiel zu $\psi = \pi = \psi_{B-f}$



$$f = (1/2, 1/2), \quad R = (r_1, r_2), \quad P = (p_1, p_2), \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x - f\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\|r_1\| s_1 + \|r_2\| s_2 + \|p_1\| y_1 + \|p_2\| y_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow$$

Beispiel zu $\psi = \pi = \psi_{B-f}$



$$f = (1/2, 1/2), \quad R = (r_1, r_2), \quad P = (p_1, p_2), \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x - f\| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

$$\|r_1\| s_1 + \|r_2\| s_2 + \|p_1\| y_1 + \|p_2\| y_2 \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\psi_{B-f}(r_1) s_1 + \psi_{B-f}(r_2) s_2 + \psi_{B-f}(p_1) y_1 + \psi_{B-f}(p_2) y_2 \ge 1.$$

Bemerkung:

Das Paar (ψ, π) mit $\psi = \pi = \psi_{B-f}$

- basiert auf der Ganzahligkeit von $z = f + \sum_{i=1}^{k} s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j$,

Bemerkung:

Das Paar (ψ, π) mit $\psi = \pi = \psi_{B-f}$

- basiert auf der Ganzahligkeit von $z = f + \sum_{i=1}^{k} s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j$,
- benutzt die Ganzzahligkeit von $y_1, \ldots, y_\ell$ nicht.

Bemerkung:

Das Paar (ψ, π) mit $\psi = \pi = \psi_{B-f}$

- basiert auf der Ganzahligkeit von $z = f + \sum_{i=1}^{k} s_i r_i + \sum_{j=1}^{\ell} y_j p_j$,
- benutzt die Ganzzahligkeit von $y_1, \ldots, y_\ell$ nicht.

Die Ganzzahligkeit von $y_1, \ldots, y_\ell$ ist eine wichtige Information!

Idee der Lifting-Technik

Lifting-Technik

Idee der Lifting-Technik

- Seien $w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{Z}^n$ beliebig.

Idee der Lifting-Technik

- Seien $w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{Z}^n$ beliebig.
- Somit, wegen Ganzzahligkeit von y:

$$f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j p_j} \in \mathbb{Z}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j}(\mathbf{p_j} + \mathbf{w_j}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Idee der Lifting-Technik

- Seien $w_1, \dots, w_\ell \in \mathbb{Z}^n$ beliebig.
- Somit, wegen Ganzzahligkeit von y:

$$f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j p_j} \in \mathbb{Z}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j}(\mathbf{p_j} + \mathbf{w_j}) \in \mathbb{Z}^n.$$

- Verwendung von $\psi = \psi_{B-f}$ ergibt:

$$\sum_{i=1}^{k} \psi(r_i) s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \psi(p_j + w_j) y_j \geq 1.$$

Idee der Lifting-Technik

- Seien $w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{Z}^n$ beliebig.
- Somit, wegen Ganzzahligkeit von y:

$$f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j p_j} \in \mathbb{Z}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j(p_j + w_j)} \in \mathbb{Z}^n.$$

- Verwendung von $\psi = \psi_{B-f}$ ergibt:

$$\sum_{i=1}^{k} \psi(r_i) s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \psi(p_j + w_j) y_j \geq 1.$$

Fazit:

Sei $\psi = \psi_{B-f}$ und $\pi = \psi^*$ mit

$$\psi^*(p) := \inf \{\psi(p + w) \ : \ w \in \mathbb{Z}^n\},$$

Dann ist (ψ, π) Schnitt-erzeugend (und stärker als (ψ, ψ)).

Lifting-Technik

Idee der Lifting-Technik

- Seien $w_1, \ldots, w_\ell \in \mathbb{Z}^n$ beliebig.
- Somit, wegen Ganzzahligkeit von y:

$$f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j p_j} \in \mathbb{Z}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad f + \sum_{i=1}^{k} r_i s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{y_j(p_j + w_j)} \in \mathbb{Z}^n.$$

- Verwendung von $\psi = \psi_{B-f}$ ergibt:

$$\sum_{i=1}^{k} \psi(r_i) s_i + \sum_{j=1}^{\ell} \psi(p_j + w_j) y_j \geq 1.$$

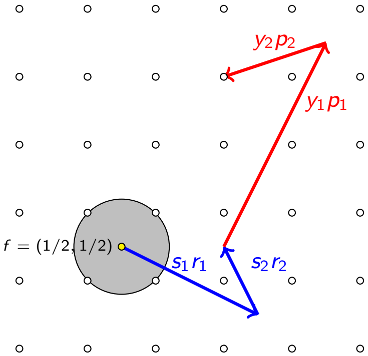
Fazit:

Sei $\psi = \psi_{B-f}$ und $\pi = \psi^*$ mit

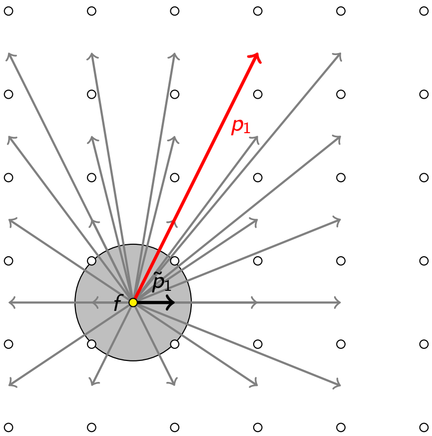
$$\psi^*(p) := \inf \{\psi(p+w) \; : \; w \in \mathbb{Z}^n\},$$

Dann ist (ψ, π) Schnitt-erzeugend (und stärker als (ψ, ψ)).

Beispiel zur Lifting-Idee

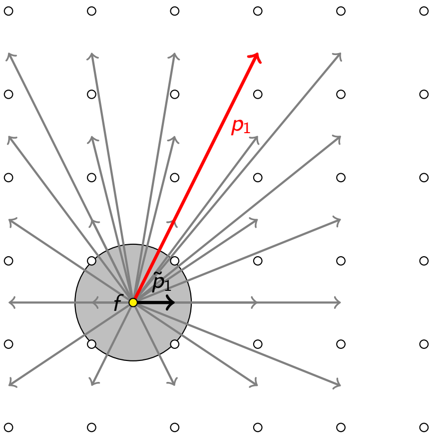


Beispiel zur Lifting-Technik



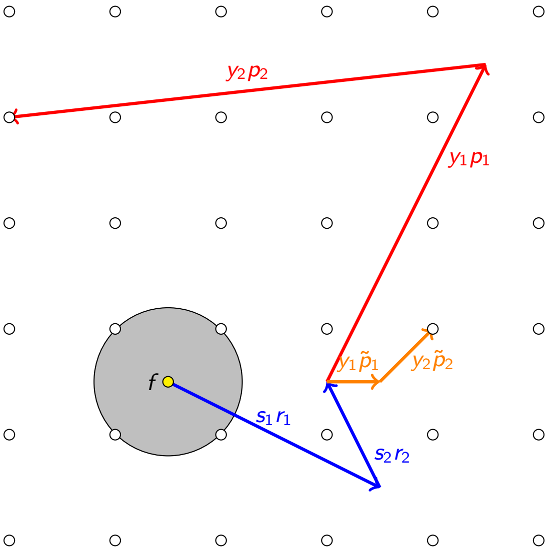
- p_1 kann durch einen viel kürzeren Vektor $\tilde{p}_1$ ersetzt werden.

Beispiel zur Lifting-Technik



- p_1 kann durch einen viel kürzeren Vektor $\tilde{p}_1$ ersetzt werden.
- Genauso: p_2 durch einen kürzeren Vektor $\tilde{p}_2$.

Beispiel zur Lifting-Technik



Beispiel zur Lifting-Technik

Fazit:

Die Ungleichung

$$s_1\psi(r_1) + s_2\psi(r_2) + y_1\psi(\mathbf{p_1}) + y_2\psi(\mathbf{p_2}) \geq 1 \qquad \forall (s, y) \in X_f(R, P)$$

kann durch eine viel stärkere Ungleichung

$$s_1\psi(r_1) + s_2\psi(r_2) + y_1\psi(\tilde{\mathbf{p}}_1) + y_2\psi(\tilde{\mathbf{p}}_2) \geq 1 \qquad \forall (s, y) \in X_f(R, P)$$

ersetzt werden.

Terminologie zur Lifting-Technik

Lifting

Ist (ψ, π) ein Schnitt-erzeugendes Paar mit $\psi = \psi_{B-f}$, so heißt π *Lifting* von ψ (bzw. von (B, f)).

Terminologie zur Lifting-Technik

Lifting

Ist (ψ, π) ein Schnitt-erzeugendes Paar mit $\psi = \psi_{B-f}$, so heißt π *Lifting* von ψ (bzw. von (B, f)).

Ein ψ kann viele unterschiedliche Liftings π besitzen.

Terminologie zur Lifting-Technik

Lifting

Ist (ψ, π) ein Schnitt-erzeugendes Paar mit $\psi = \psi_{B-f}$, so heißt π *Lifting* von ψ (bzw. von (B, f)).

Ein ψ kann viele unterschiedliche Liftings π besitzen.

Dominanz

Für zwei Liftings π', π'' von ψ sagen wir: π' *dominiert* π'', falls

$$\pi'(r) \leq \pi''(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Terminologie zur Lifting-Technik

Lifting

Ist (ψ, π) ein Schnitt-erzeugendes Paar mit $\psi = \psi_{B-f}$, so heißt π *Lifting* von ψ (bzw. von (B, f)).

Ein ψ kann viele unterschiedliche Liftings π besitzen.

Dominanz

Für zwei Liftings π', π'' von ψ sagen wir: π' *dominiert* π'', falls

$$\pi'(r) \leq \pi''(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

minimales Lifting

π heißt *minimales Lifting* von ψ, falls π von keinem anderen Lifting π' mit $\pi' \neq \pi$ von ψ dominiert wird.

- Durch Anwendung des Zornschen Lemmas kann gezeigt werden, dass jedes ψ mindestens ein minimales Lifting besitzt.

- Durch Anwendung des Zornschen Lemmas kann gezeigt werden, dass jedes ψ mindestens ein minimales Lifting besitzt.
- Generell kann ein ψ unendlich viele minimale Liftings besitzen!

Ziele

Allgemeines Ziel:

Die minimalen Liftings für ein $\psi = \psi_{B-f}$ so beschreiben, dass man solche Liftings in Algorithmen benutzen kann.

Ziele

Ein konkretes Ziel:

Paare (B, f) beschreiben, bei denen ψ_{B-f} ein **eindeutiges** minimales Lifting besitzt.

Ziele

Ein konkretes Ziel:

Paare (B, f) beschreiben, bei denen ψ_{B-f} ein **eindeutiges** minimales Lifting besitzt.

Einschränkung:

Im folgenden betrachten wir den Fall eines maximalen gitterpunktfreien Polytops B (natürliche Einschränkung).

Ziele

Ein konkretes Ziel:

Paare (B, f) beschreiben, bei denen ψ_{B-f} ein **eindeutiges** minimales Lifting besitzt.

Einschränkung:

Im folgenden betrachten wir den Fall eines maximalen gitterpunktfreien Polytops B (natürliche Einschränkung).

Vorteile vom eindeutigen minimalen Lifting:

Eindeutige beste Wahl + eine Beschreibung für dieses Lifting ist bekannt.

Lifting-Bereich $R(B, f)$

Lifting-Bereich $R(B, f)$

- Sei $\mathcal{F}(B)$ die Menge aller Seiten des max-gpf Polytops B.

Lifting-Bereich $R(B, f)$

- Sei $\mathcal{F}(B)$ die Menge aller Seiten des max-gpf Polytops B.
- Für $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset, B\}$ und $z \in F \cap \mathbb{Z}^n$ sei:

$$S_{F,z}(f) := \mathrm{conv}(\{f\} \cup F) \cap \big(z + f - \mathrm{conv}(\{f\} \cup F)\big)$$

Lifting-Bereich $R(B, f)$

- Sei $\mathcal{F}(B)$ die Menge aller Seiten des max-gpf Polytops B.
- Für $F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset, B\}$ und $z \in F \cap \mathbb{Z}^n$ sei:

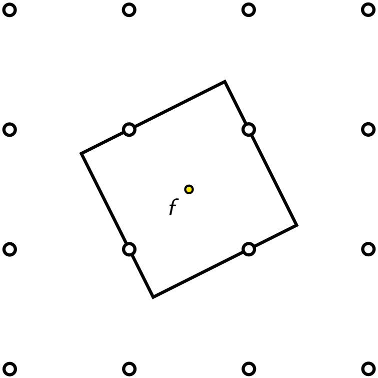
$$S_{F,z}(f) := \mathrm{conv}(\{f\} \cup F) \cap \big(z + f - \mathrm{conv}(\{f\} \cup F)\big)$$

- Wir nennen

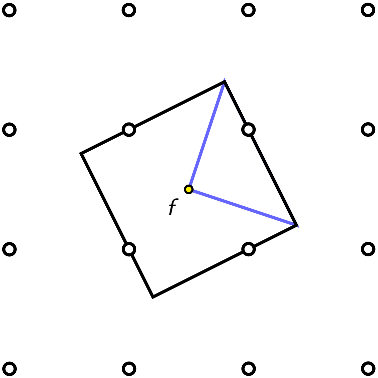
$$R(B, f) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(B) \setminus \{\emptyset, B\}} \bigcup_{z \in F \cap \mathbb{Z}^n} S_{F,z}(f)$$

Lifting-Bereich von (B, f)

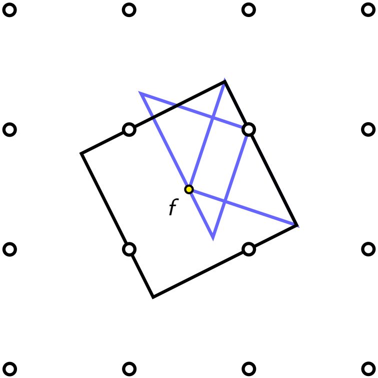
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



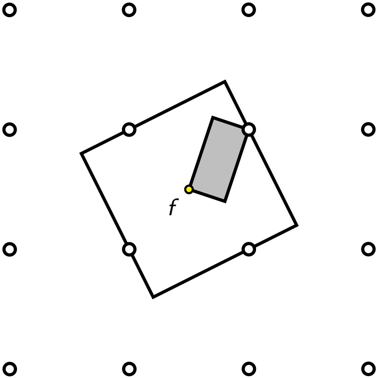
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



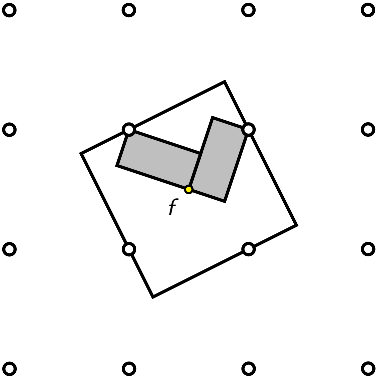
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



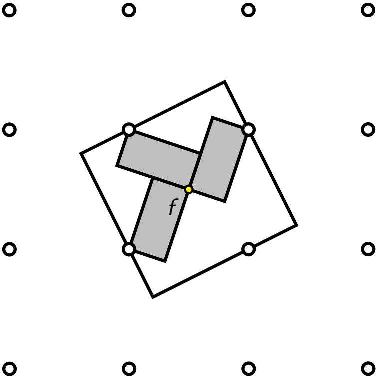
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



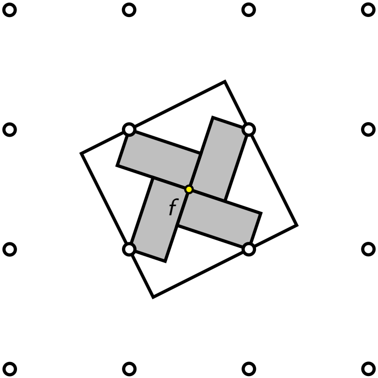
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



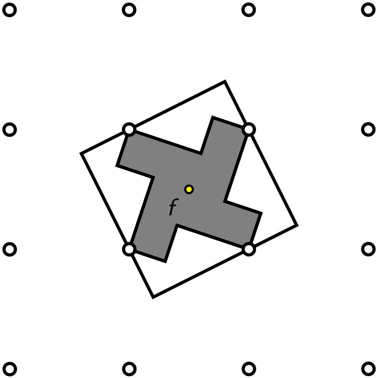
Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



Beispiel zur Definition des Lifting-Bereichs $R(B, f)$



$R(B, f)$ und 'eindeutiges minimales Lifting'

Theorem (Basu, Campêlo, Conforti, Cornuéjols, Zambelli 2013):

Sei B ein max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

Theorem (Basu, Campêlo, Conforti, Cornuéjols, Zambelli 2013):

Sei B ein max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. ψ_{B-f} besitzt ein eindeutiges minimales Lifting

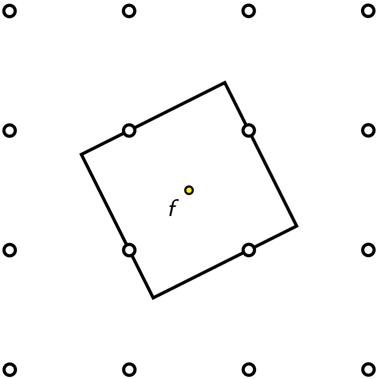
$R(B, f)$ und 'eindeutiges minimales Lifting'

Theorem (Basu, Campêlo, Conforti, Cornuéjols, Zambelli 2013):

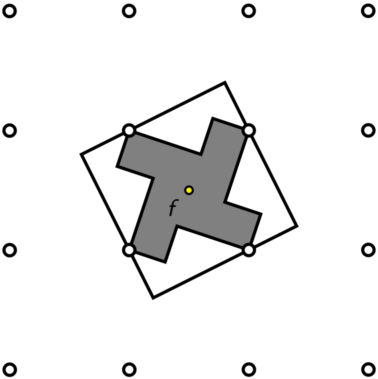
Sei B ein max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. ψ_{B-f} besitzt ein eindeutiges minimales Lifting
2. $R(B, f) + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n$

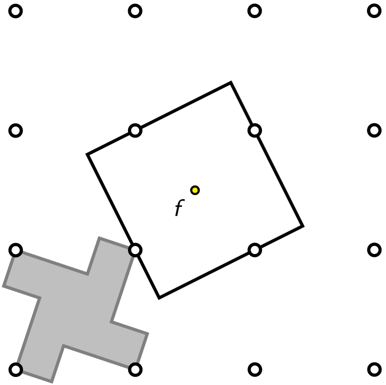
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



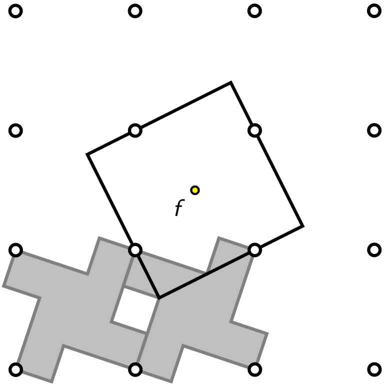
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



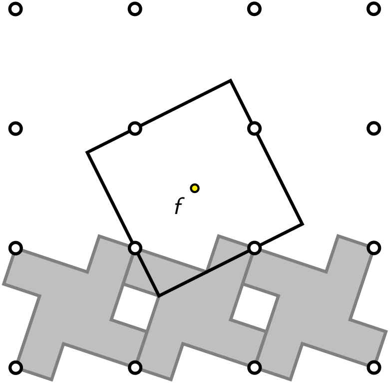
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



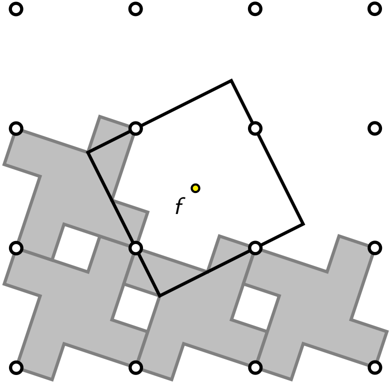
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



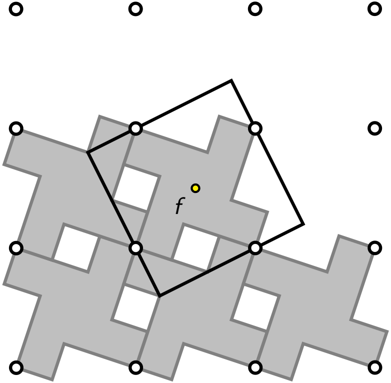
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



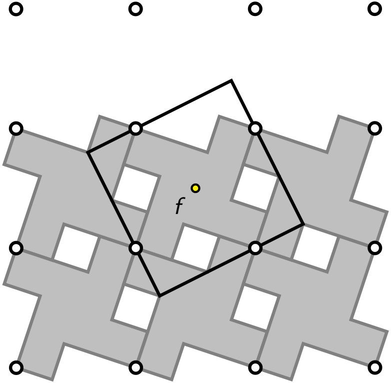
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



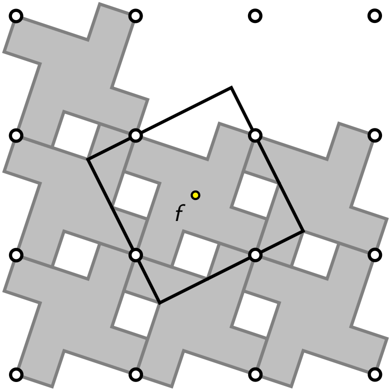
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



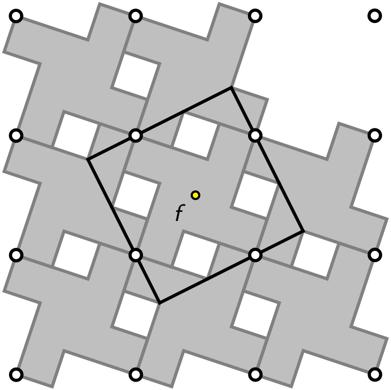
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



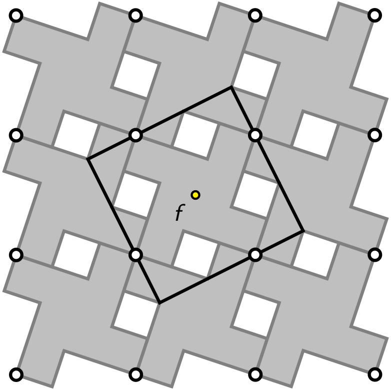
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



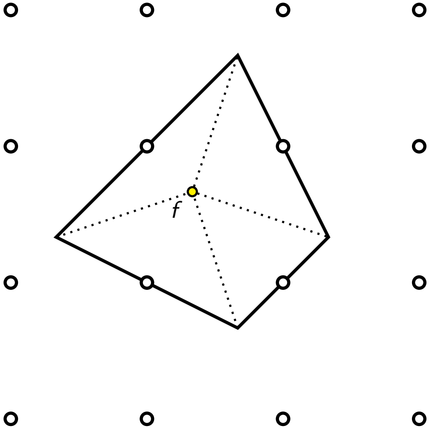
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



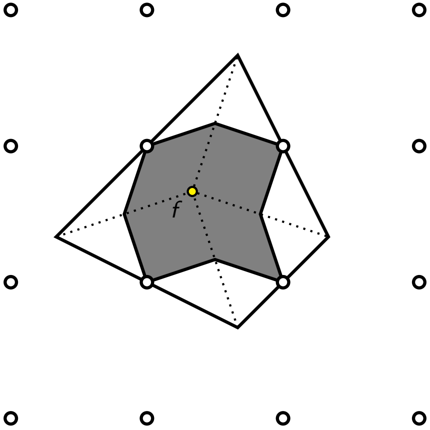
(B, f) ohne eindeutiges minimales Lifting



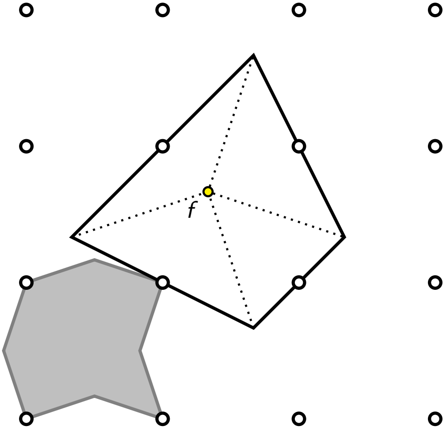
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



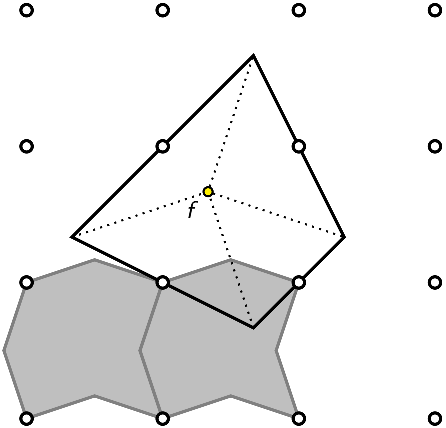
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



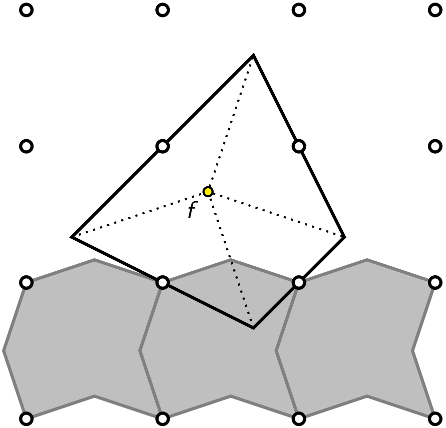
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



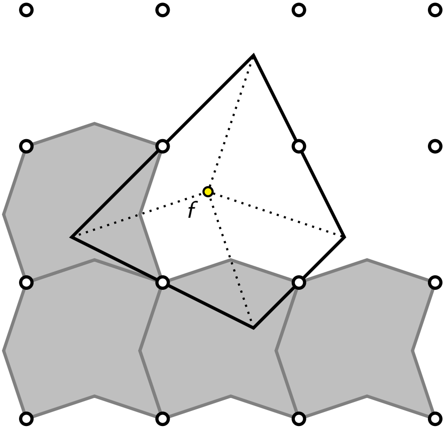
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



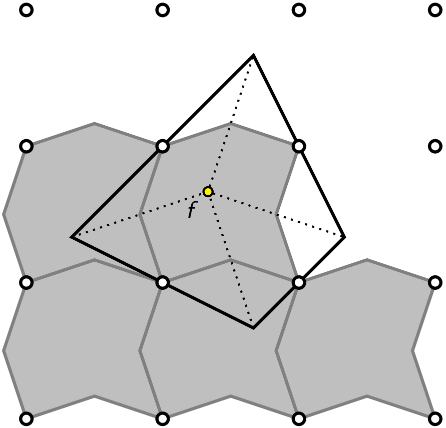
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



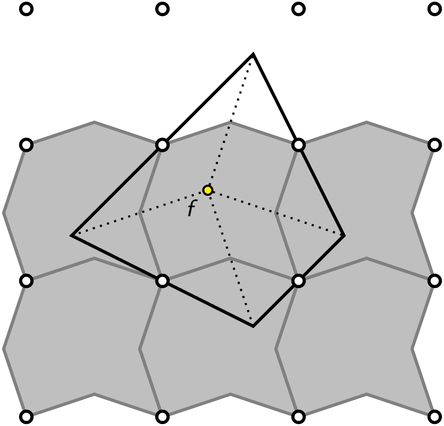
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



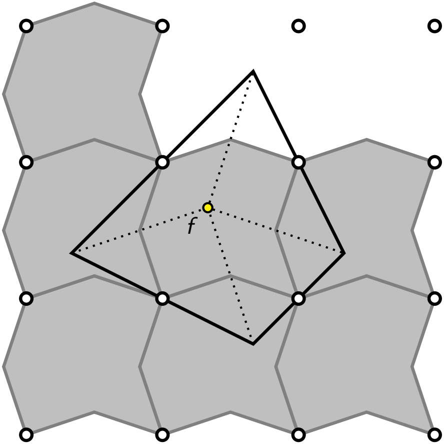
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



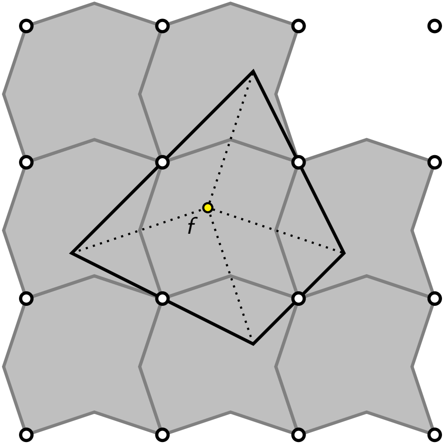
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



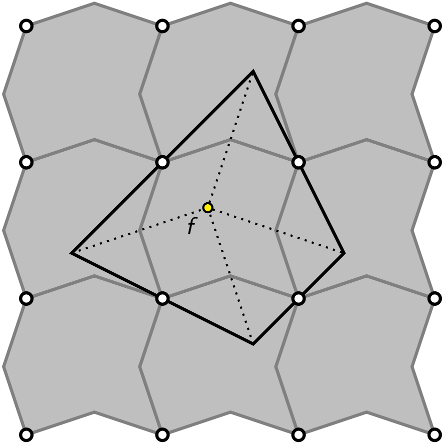
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



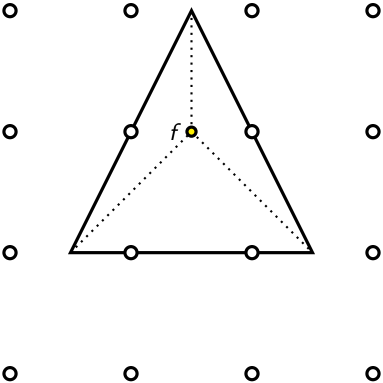
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



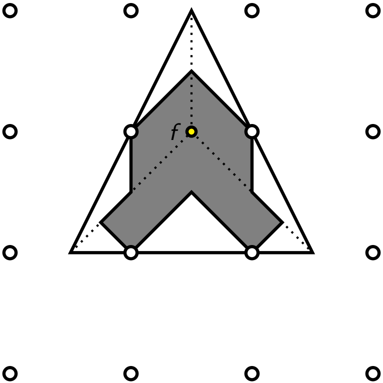
Ein Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



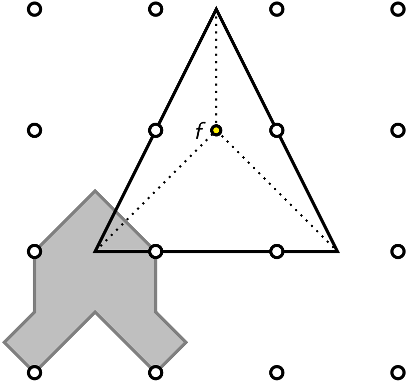
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



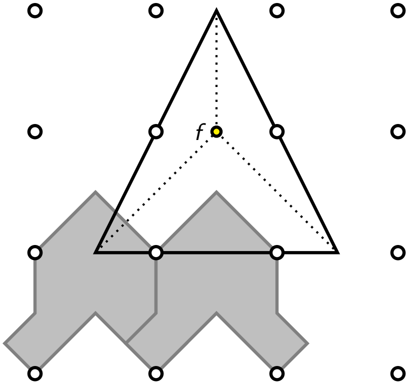
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



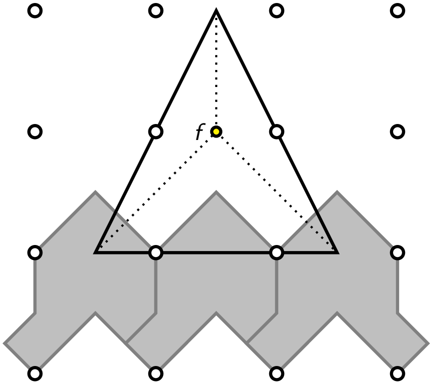
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



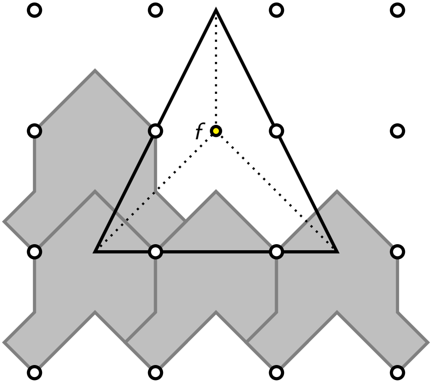
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



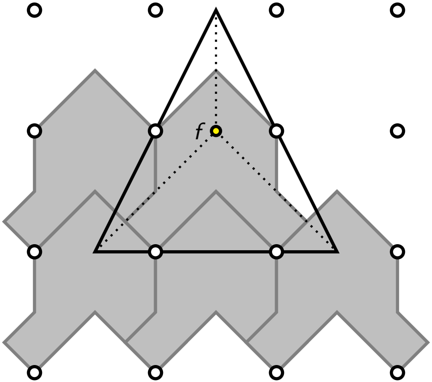
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



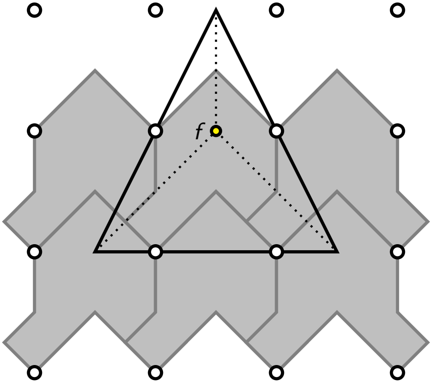
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



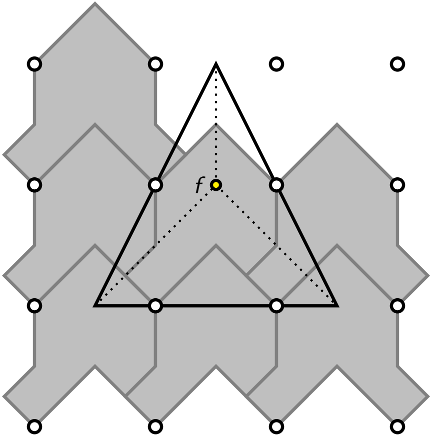
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



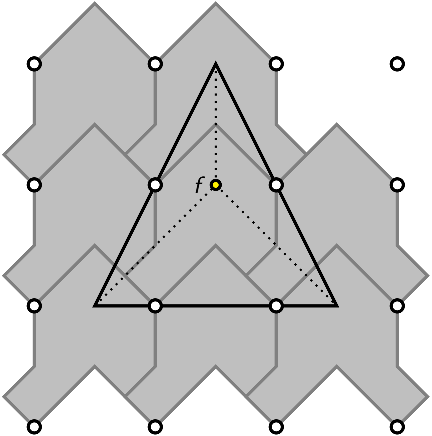
Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting

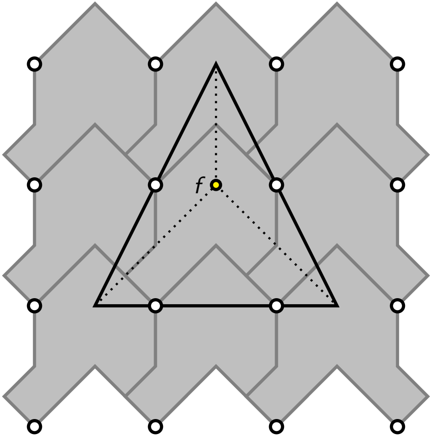


Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting



Zweites Beispiel mit einem eindeutigen minimalen Lifting




f

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem (Basu, Cornuéjols, Köppe 2012):

Sei B ein **simpliziales** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem (Basu, Cornuéjols, Köppe 2012):

Sei B ein **simpliziales** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$,

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem (Basu, Cornuéjols, Köppe 2012):

Sei B ein **simpliziales** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \mathrm{int}(B)$,
2. B besitzt **kein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \mathrm{int}(B)$.

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem (Basu, Cornuéjols, Köppe 2012):

Sei B ein **simpliziales** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \text{int}(B)$,
2. B besitzt **kein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \text{int}(B)$.

Die Simplizialitätsvoraussetzung ist sehr restriktiv!

Invarianz-Theorem für simpliziale Polytope

Abhängigkeit von f:

Kann es vorkommen, dass man beim festen B ein endeutiges Lifting für eine Wahl von f hat und kein endeutiges Lifting für eine andere Wahl von f?

Invarianz-Theorem (Basu, Cornuéjols, Köppe 2012):

Sei B ein **simpliziales** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$,
2. B besitzt **kein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$.

Die Simplizialitätsvoraussetzung ist sehr restriktiv!

Frage (Basu, Cornuéjols, Köppe):

Gilt das Invarianz-Theorem auch ohne Simplizialitätsvoraussetzung an B?

Allgemeines Invarianz-Theorem

Invarianz-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei B **beliebiges** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

Invarianz-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei B **beliebiges** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$,

Invarianz-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei B **beliebiges** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$,
2. B besitzt **kein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \operatorname{int}(B)$.

Invarianz-Theorem (A., Basu 2014+):

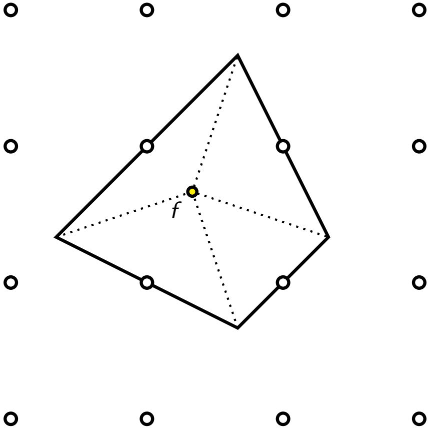
Sei B **beliebiges** max-gpf Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

1. B besitzt **ein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \mathrm{int}(B)$,
2. B besitzt **kein eindeutiges** minimales Lifting **für jedes** $f \in \mathrm{int}(B)$.

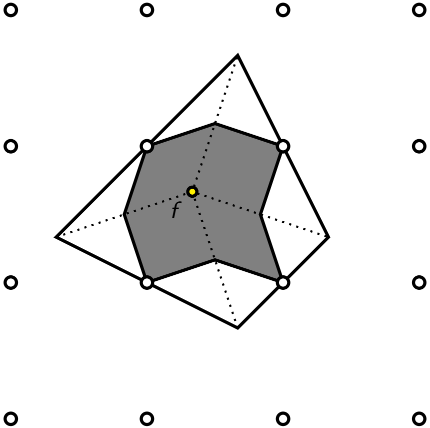
Fazit:

'Eindeutiges minimales Lifting' ist eine Eigenschaft von B allein: Die Wahl von $f \in \mathrm{int}(B)$ spielt keine Rolle.

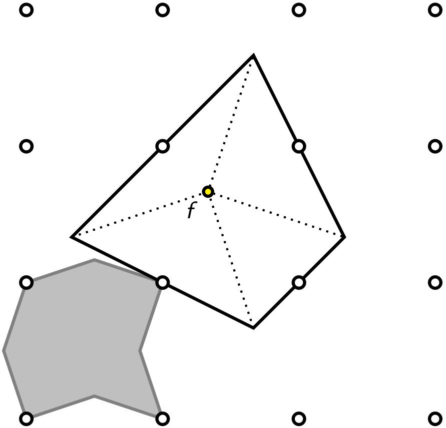
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



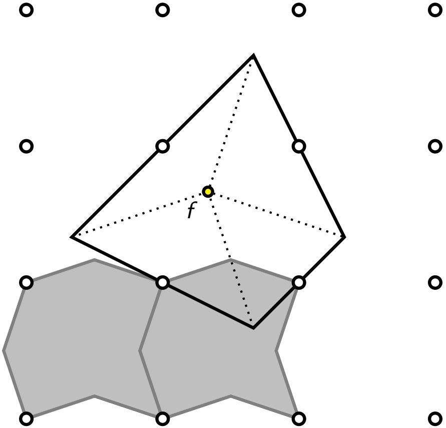
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



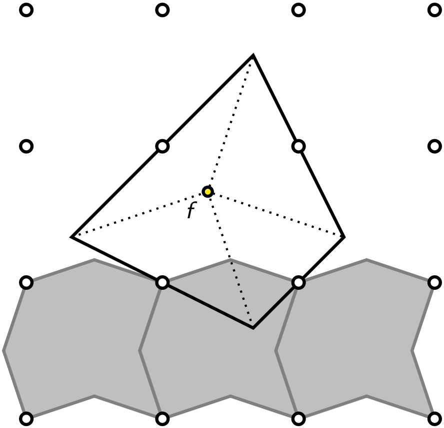
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



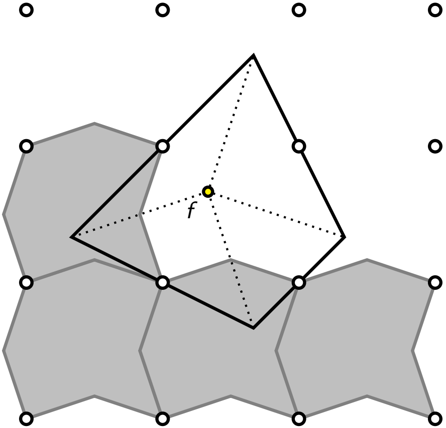
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



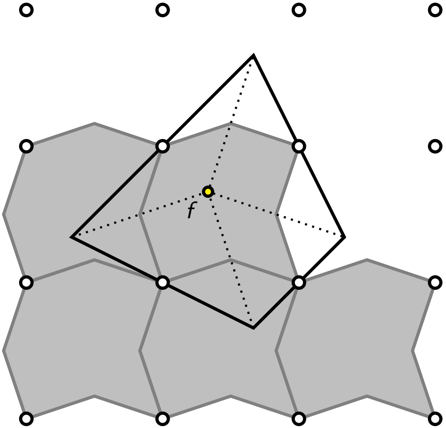
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting

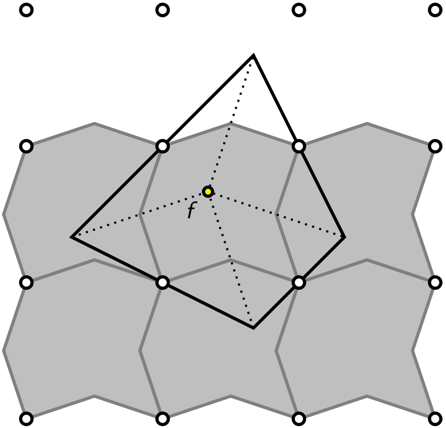


Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting

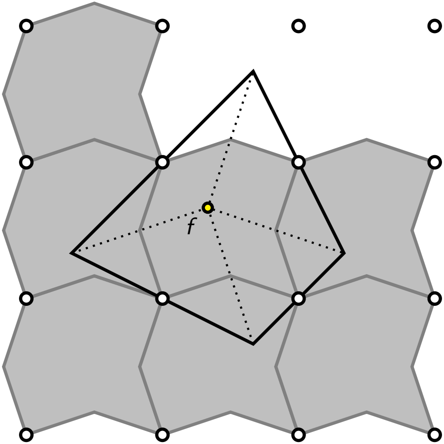


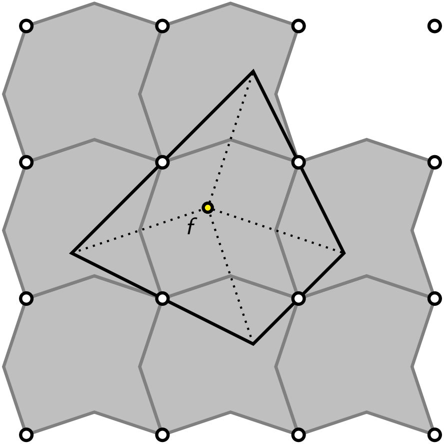
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



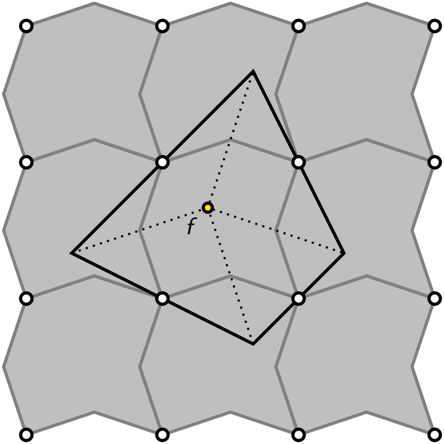

f

Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting

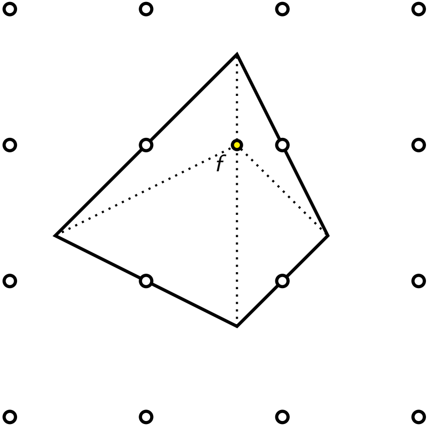



f

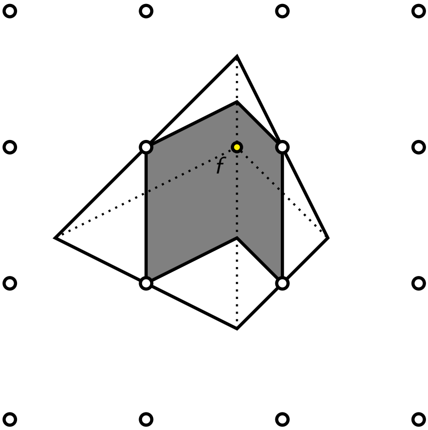
Beispiel mit einem eindeutingen minimalen Lifting



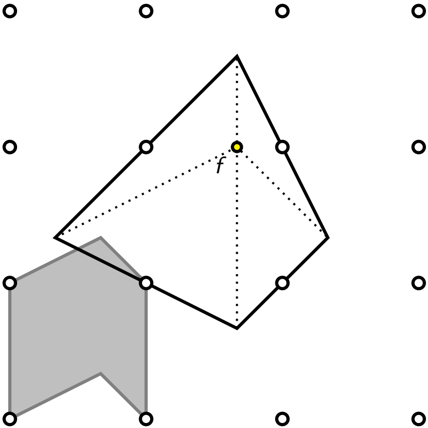
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \mathrm{int}(B)$



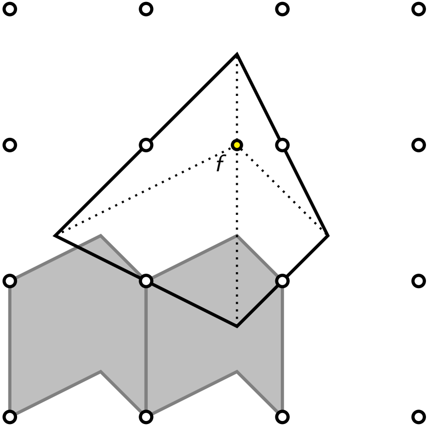
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \mathrm{int}(B)$



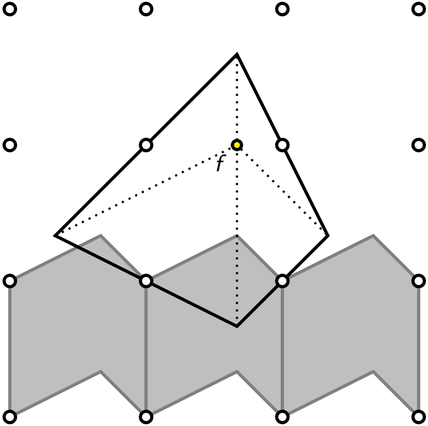
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



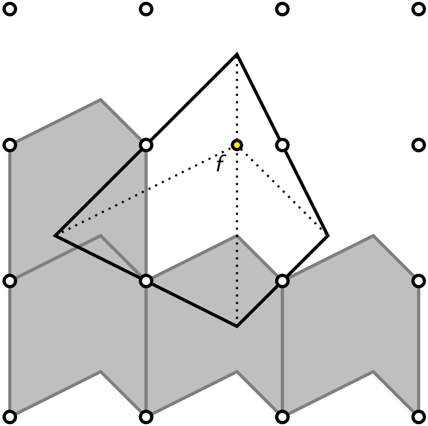
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \mathrm{int}(B)$



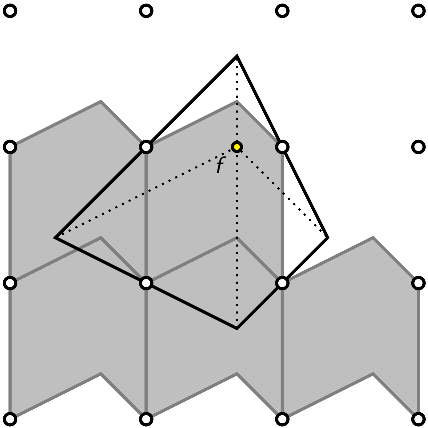
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



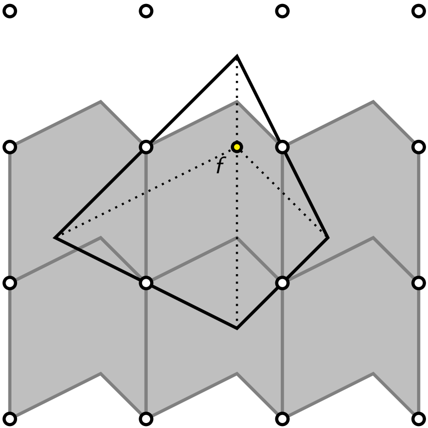
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



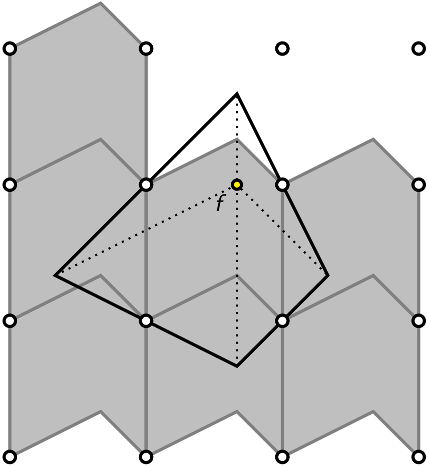
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



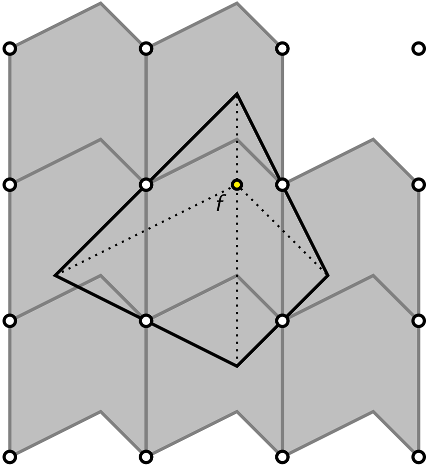
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \text{int}(B)$



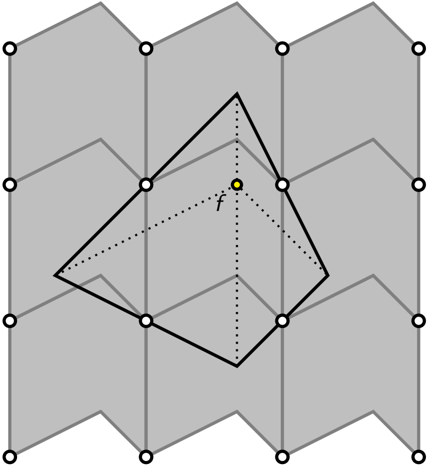
Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \mathrm{int}(B)$



Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



Beispiel mit dem selben B und einem anderen $f \in \operatorname{int}(B)$



Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das 'eindeutige minimale Lifting' (als Filter)

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das 'eindeutige minimale Lifting' (als Filter)
- Analyse für feste Dimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das 'eindeutige minimale Lifting' (als Filter)
- Analyse für feste Dimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das ‘eindeutige minimale Lifting’ (als Filter)
- Analyse für feste Dimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- In der Dimension $n = 1$ hat jedes max-gpf Polytop trivialerweise ein eindeutiges Lifting.

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das 'eindeutige minimale Lifting' (als Filter)
- Analyse für feste Dimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- In der Dimension $n = 1$ hat jedes max-gpf Polytop trivialerweise ein eindeutiges Lifting.
- In der Dimension $n = 2$ ist eine Charakterisierung vorhanden; Dey, Wolsey 2010.

Ziele

Ziel, umformuliert:

Vollständige explizite Beschreibung von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting.

Zwischenziele, Fragen

- Möglichst große Familien von max-gpf Polytopen B mit einem eindeutigen minimalen Lifting finden.
- Gute notwendinge Bedingungen für das 'eindeutige minimale Lifting' (als Filter)
- Analyse für feste Dimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- In der Dimension $n = 1$ hat jedes max-gpf Polytop trivialerweise ein eindeutiges Lifting.
- In der Dimension $n = 2$ ist eine Charakterisierung vorhanden; Dey, Wolsey 2010.
- In den Dimensionen $n \geq 3$ ist nicht viel bekannt!

Konstruktionen mit Koprodukt

Definition: Koprodukt

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$
- Die Menge
$$K_1 \Diamond K_2 := \operatorname{conv}(K_1 \times \{o_2\} \cup \{o_1\} \times K_2)$$
heißt *Koprodukt* von K_1 und K_2.

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$
- Die Menge
$$K_1 \Diamond K_2 := \operatorname{conv}(K_1 \times \{o_2\} \cup \{o_1\} \times K_2)$$
heißt *Koprodukt* von K_1 und K_2.

Bemerkungen:

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1,2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$
- Die Menge
$$K_1 \Diamond K_2 := \operatorname{conv}(K_1 \times \{o_2\} \cup \{o_1\} \times K_2)$$
heißt *Koprodukt* von K_1 und K_2.

Bemerkungen:

- Name und Bezeichnung – Vorschlag von Peter McMullen

Konstruktionen mit Koprodukt

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1,2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$
- Die Menge

$$K_1 \lozenge K_2 := \operatorname{conv}(K_1 \times \{o_2\} \cup \{o_1\} \times K_2)$$

heißt *Koprodukt* von K_1 und K_2.

Bemerkungen:

- Name und Bezeichnung – Vorschlag von Peter McMullen
- Doppelpyramiden und Pyramiden sind Koprodukte

Konstruktionen mit Koprodukt

Definition: Koprodukt

- Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
- Sei o_i der Nullpunkt von $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1, 2\}$
- Sei K_i nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_i}$
- Die Menge
$$K_1 \lozenge K_2 := \operatorname{conv}(K_1 \times \{o_2\} \cup \{o_1\} \times K_2)$$
heißt *Koprodukt* von K_1 und K_2.

Bemerkungen:

- Name und Bezeichnung – Vorschlag von Peter McMullen
- Doppelpyramiden und Pyramiden sind Koprodukte
- Koprodukt ist dual zu Kreuzprodukt

Koprodukt-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und sei $0 < \mu < 1$. Sei B_i ein n_i-dimensionales Polytop in $\mathbb{R}^{n_i}$ und $c_i \in B_i$ $(i \in \{1, 2\})$.

Koprodukt-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und sei $0 < \mu < 1$. Sei B_i ein n_i-dimensionales Polytop in $\mathbb{R}^{n_i}$ und $c_i \in B_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Sei

$$B := \frac{B_1 - c_1}{1 - \mu} \lozenge \frac{B_2 - c_2}{\mu} + (c_1, c_2).$$

Koprodukt-Theorem (A., Basu 2014+):

Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und sei $0 < \mu < 1$. Sei B_i ein n_i-dimensionales Polytop in $\mathbb{R}^{n_i}$ und $c_i \in B_i$ $(i \in \{1, 2\})$. Sei

$$B := \frac{B_1 - c_1}{1 - \mu} \diamond \frac{B_2 - c_2}{\mu} + (c_1, c_2).$$

Dann gilt:

Konstruktionen mit Koprodukt

Koprodukt-Theorem (A., Basu 2014+):

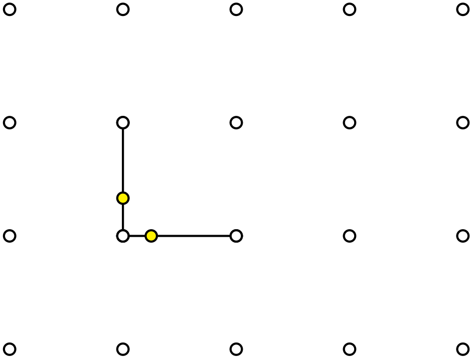
Sei $n := n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und sei $0 < \mu < 1$. Sei B_i ein n_i-dimensionales Polytop in $\mathbb{R}^{n_i}$ und $c_i \in B_i$ ($i \in \{1,2\}$). Sei

$$B := \frac{B_1 - c_1}{1-\mu} \Diamond \frac{B_2 - c_2}{\mu} + (c_1, c_2).$$

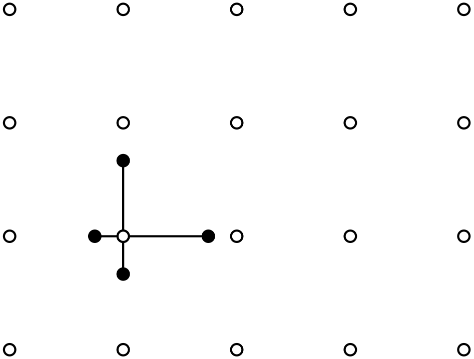
Dann gilt:

1. **Sind B_1, B_2 max-gpf Polytope mit einem eindeutigen minimalen Lifting, dann ist auch B ein max-gpf Polytop mit einem eindeutigen minimalen Lifting.**

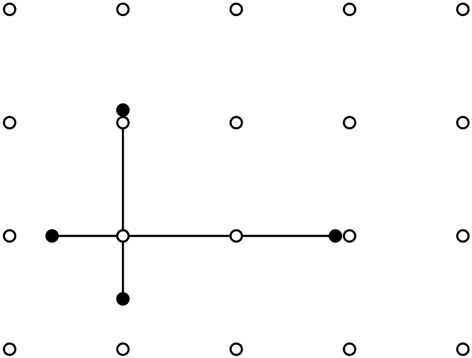
Beispiel zum Koprodukt-Theorem für $n_1 = n_2 = 1$



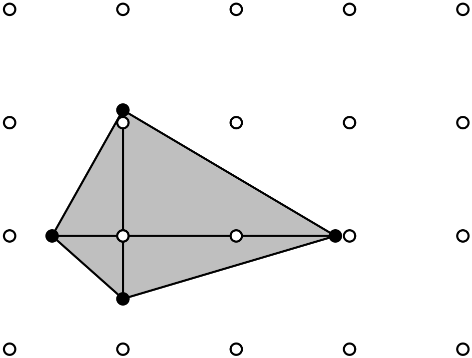
Beispiel zum Koprodukt-Theorem für $n_1 = n_2 = 1$



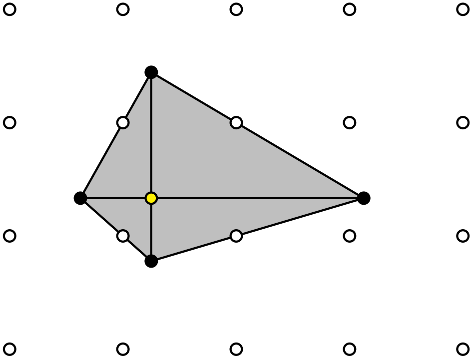
Beispiel zum Koprodukt-Theorem für $n_1 = n_2 = 1$



Beispiel zum Koprodukt-Theorem für $n_1 = n_2 = 1$



Beispiel zum Koprodukt-Theorem für $n_1 = n_2 = 1$



Bemerkungen:

Konstruktionen mit Hilfe der Koprodukt-Operation

Bemerkungen:

- In der Dimension $n = 2$ erhält man durch die Koprodukt–Operation **alle** maximalen gitterpunkfreien Polytope mit einem eindeutigen minimalen Lifting (bis auf affine unimodulare Transformationen).

Bemerkungen:

- In der Dimension $n = 2$ erhält man durch die Koprodukt–Operation **alle** maximalen gitterpunkfreien Polytope mit einem eindeutigen minimalen Lifting (bis auf affine unimodulare Transformationen).
- In höheren Dimensionen erhält man durch die Koprodukt-Operation **alle** maximalen gitterpunkfreien Polytope mit einem eindeutigen minimalen Lifting, **die bis jetzt bekannt waren; und viel mehr!**

Notwendige Bedingungen...

Notwendige Bedingungen...

- **Das Gefühl**: max-gpf Polytope B mit einem eindeutigen minimalen Lifting sind sehr besonders/selten. Wir wollen dieses Gefühl zumindest in Spezialfällen bestätigen.

Notwendige Bedingungen...

- **Das Gefühl**: max-gpf Polytope B mit einem eindeutigen minimalen Lifting sind sehr besonders/selten. Wir wollen dieses Gefühl zumindest in Spezialfällen bestätigen.
- Wir haben aber Spezialfälle analysiert.

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält.

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn** B **ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist** B **ein Simplex.**

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn** B **ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist** B **ein Simplex.**

Zum Beweis:

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn** B **ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist** B **ein Simplex.**

Zum Beweis:

- Um dieses Resultat zu zeigen, haben wir Kontakt zu **Peter McMullen** aufgenommen.

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn B ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist B ein Simplex.**

Zum Beweis:

- Um dieses Resultat zu zeigen, haben wir Kontakt zu **Peter McMullen** aufgenommen.
- Als Hilfsmittel benutzen wir das Venkov-Alexandrov-McMullen Theorem über **translative Pflasterungen** mit konvexen Körpern.

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn** B **ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist** B **ein Simplex.**

Zum Beweis:

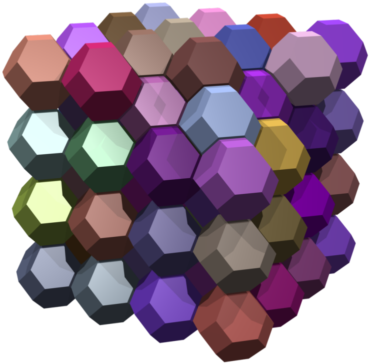
- Um dieses Resultat zu zeigen, haben wir Kontakt zu **Peter McMullen** aufgenommen.
- Als Hilfsmittel benutzen wir das Venkov-Alexandrov-McMullen Theorem über **translative Pflasterungen** mit konvexen Körpern.
- Wir benutzen außerdem **Zonotope** und ihre Charakterisierungen.

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn B ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist B ein Simplex.**

Zum Beweis:

- Um dieses Resultat zu zeigen, haben wir Kontakt zu **Peter McMullen** aufgenommen.
- Als Hilfsmittel benutzen wir das Venkov-Alexandrov-McMullen Theorem über **translative Pflasterungen** mit konvexen Körpern.
- Wir benutzen außerdem **Zonotope** und ihre Charakterisierungen.



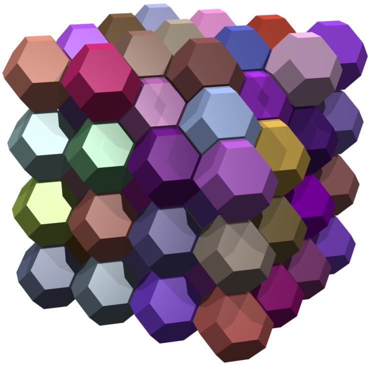
Theorem über Pyramiden

Theorem über Pyramiden (A., Basu 2014+):

Sei B max-gpf **Pyramide** in $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass das relative Innere der Basis der Pyramide B **genau einen ganzzahligen Punkt** enthält. **Wenn B ein eindeutiges minimales Lifting hat, dann ist B ein Simplex.**

Zum Beweis:

- Um dieses Resultat zu zeigen, haben wir Kontakt zu **Peter McMullen** aufgenommen.
- Als Hilfsmittel benutzen wir das Venkov-Alexandrov-McMullen Theorem über **translative Pflasterungen** mit konvexen Körpern.
- Wir benutzen außerdem **Zonotope** und ihre Charakterisierungen.



∗ Bild aus Wikipedia

Inhalt